



Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner

Kirk, Jens; Nielsen, Mogens Peter

Publication date:
1978

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Kirk, J., & Nielsen, M. P. (1978). *Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-107

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

AFDELINGEN FOR
BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Jens Kirk

DIREKTE BEREGNING AF IMPERFEKTE
SKALKONSTRUKTIONER

RAPPORT NR. R 107 1979

DIREKTE BEREGNING
AF
IMPERFEKTE SKALKONSTRUKTIONER

Jens Kirk

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

1978

FORORD

Denne afhandling er skrevet som et led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad ved Den polytekniske Læreanstalt, Danmarks tekniske Højskole.

Licentiatstudiet er udført ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner med professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen som faglærer.

Licentiatstudiets gennemførelse er muliggjort gennem økonomisk støtte fra Statens teknisk-videnskabelige Forskningsråd og Afdelingen for Bærende Konstruktioner.

Jeg ønsker her at takke såvel min faglærer som de af afdelingens medarbejdere, der har bidraget til udbyttet af mit licentiatstudium, for den indsats, de har ydet. Endvidere takkes assistenterne Karen Perris, Susan Lind-Nielsen og Annette Bærentzen samt fotograf Christian Bramsen og ingeniørassistent Benny Leisten for arbejdet i forbindelse med maskinskrivning og mangfoldiggørelse af afhandlingen.

September 1978

Jens Kirk

RESUME

Denne rapport beskriver den teoretiske baggrund for en beregningsmetode for vilkårlige hyperelastiske skalkonstruktioner uden knæk. Der anvendes en elemenmodel baseret på et kompatibelt finite element. Der anvendes en ikke-lineær tøjnings-flytningsrelation. En række numeriske eksempler bl.a. bestemmelse af imperfektionsfølsomhed for cylinderskaller er anført.

Endvidere beskrives en forenklet beregningsmetode, der anvendt på konkrete eksempler giver resultater, der nøje svarer til de med elementprogrammet fundne. Et par fremgangsmåder til bestemmelse af minimal bæreevne for foreskrevne imperfektionsamplitude er skitseret.

ABSTRACT

The report gives the theoretical background for an implementation of a finite-element-program for the geometrical non-linear analysis of elastic shells. Some numerical results concerning imperfection sensitivity of cylindrical shells are given.

In addition a simplified method is described. The method used on specific examples leads to results very close to thoses obtained by the finite-element-program. Finally, a couple of methods for determining the imperfection sensitivity are described.

INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
1. <u>INDLEDNING</u>	1
2. <u>SKALTEORI</u>	3
2.1 Det benyttede koordinatsystem, beskrivelse af den udeformerede skalflade.	3
2.2 Beskrivelse af den deformede skalflade.	8
2.3. Beskrivelse af en flades deformation. Fuldstændige og forenklede tøjningsmål.	11
2.4 Det benyttede tøjningsenergiudtryk, konstitutive ligninger, potentiel energi.	15
2.5 Tolkning af spændingsstørrelser, udledning af ligevægtsligninger.	16
Referencer.	19
A-2.1 Geometribestemmelse ved hjælp af imperfektionsfelt.	20
3. <u>ELEMENTFORMULERING AF EN IKKE-LINEÆR ELASTICITETSTEORI</u>	22
3.1 Den betragtede teori.	22
3.2 Diskretisering.	22
3.3 Potentiel energi.	24
3.4 Ligevægtsbetingelser.	25
3.5 Incrementale ligevægtsligninger.	26
3.6 Samlet formelsæt.	27
3.6.1 Definitioner.	27
3.6.2 Beskrivelse med brug af globale størrelser.	28
3.6.3 Opbygning af systemmatricer af elementbidrag.	29
3.7 Bestemmelse af "eksakte" knudekræfter.	31
Referencer.	33
4. <u>EN FINITE-ELEMENT MODEL TIL BEREGNING AF TYNDE SKALKONSTRUKTIONER</u>	34
4.1 Indledning.	34
4.2 Krav til og ønskede egenskaber for elementmodellen.	34
4.3 Interpolation af flytningskomposanter beliggende i skallens tangentplan.	37

	Side
4.4 Interpolation af flytningskomponenten i retning af skalfladens normalvektor.	39
4.5 Interpolation af tøjningsmålene.	42
Referencer.	45
A-4.1 Matricer knyttet til interpolation af u.	47
A-4.2 Matricer knyttet til interpolation af w.	50
A-4.3 Tøjnings-tilstandsmatricer.	58
5. <u>PERTURBATIONSANALYSE AF LIGEVÆGTSTILSTANDE</u>	61
5.1 Indledning.	61
5.2 Bestemmelse af kritisk tilstand.	61
5.3 Deformationsforhold efter forgrening.	66
Referencer.	73
A-5.1 Forskellige metoder til bestemmelse af kritisk tilstand afprøvet på et simpelt stangeeksempel.	74
6. <u>FORENKLET BEREGNING AF IMPERFEKTE CIRKULÆRE CYLINDERSKALLER</u>	79
6.1 Indledning.	79
6.2 Notation.	80
6.3 Benyttede tøjningsmål for en imperfekt skalkonstruktion af næsten cirkulærcylindrisk form.	82
6.4 Udtryk for den potentielle energi.	84
6.5 Introduktion af en spændingsfunktion i udtrykket for den potentielle energi.	85
6.6 Tilnærmet udtryk for den potentielle energi.	87
6.7.1 Ligevægtsligninger hørende til den tilnærmede beregningsmetode for fast imperfektion.	95
6.7.2 Numeriske eksempler på beregning med fast imperfektion.	97
6.8.1 Beregning med affine imperfektioner og flytninger.	102
6.8.2 Numeriske eksempler på beregning med affine imperfektioner og flytninger.	103
6.9.1 Beregning med flytnings- og imperfektionsniveau som primære parametre.	107
6.9.2 Numeriske eksempler på beregning med frie flytnings- og imperfektionsfelter.	110
6.10 Konsekvent bestemmelse af bæreevne ved anvendelse af matematisk programmering.	116

III

	Side
7. <u>NUMERISKE EKSEMPLER</u>	119
E-1 Rektangulær plade - Eulersøjle.	119
E-2 Rektangulær plade med tværbelastning.	123
E-3 Lang rektangulær plade med axial belastning.	125
E-4 Kvadratisk plade underkastet ren forskydning.	129
E-5 Cylindertag med egenvægt.	133
E-6 Cirkulær-cylindrisk panel.	136
E-7 Foldning af en perfekt cirkulær cylinder.	142
E-8 Elliptisk cylinder.	147
E-9 Imperfekt cirkulær cylinder.	158
E-10 Imperfekt cirkulær cylinder.	163
8. <u>SAMMENFATNING AF RESULTATER OG FORSLAG TIL YDERLIGERE ARBEJDE INDEN FOR OMRÅDET</u>	167
9. <u>SYMBOLER OG NOTATION</u>	169
10. <u>INDEX</u>	173

1. INDLEDNING.

I dette arbejde søges leveret bidrag til afklaring af bæreevneforhold for skalkonstruktioner. Det område, der specielt behandles, er sammenhængen mellem bæreevne og konstruktiv afvigelse fra den tilstræbte geometri.

Baggrunden for arbejdet er, at der i adskillige praktisk relevante tilfælde må konstateres uacceptable forskelle mellem eksperimentelt bestemte værdier for bæreevnen og teoretiske værdier, der hidrører fra matematiske modeller baseret på den tilstræbte geometri. Disse afvigelser skyldes i meget vid udstrækning indflydelsen af forskelle mellem den idealiserede og den faktisk forekommende geometri.

I de følgende afsnit behandles to fremgangsmåder til analyse af skalkonstruktioners imperfektionsfølsomhed. Det er metoder, der er baseret på direkte behandling af den potentielle energi for skalkonstruktionen. For begge metoders vedkommende diskretiseres flytningsfeltet.

Den ene metode beskrives i kapitel 6. Som eksempel er valgt den cirkulære cylinderskal med aksial belastning. Der benyttes et antal "globale" felter til beskrivelse af flytningen. En række forskellige flytningsfelter analyseres. Der skitseres en metode til bestemmelse af den mindste værdi af bæreevnen for en cylinderskal med given imperfektionsamplitude. Metoden adskiller sig fra de sædvanlige metoder til bestemmelse af imperfektionsfølsomhed ved, at den farligste imperfektionsform, der kan modelleres, bestemmes. Endvidere skitseres en konsekvent bestemmelse af bæreevnen baseret på matematisk programmering.

Den anden metode består i, at skalkonstruktionen modelleres med med kompatible finite elementer. I kapitel 2 gives en eksakt deformationsbeskrivelse af en (todimensional) flade. De opstillede deformationsmål simplificeres til den grad af nøjagtighed, der anvendes ved omhyggelig beregning af bjælke-søjler. I kapitel 3 udledes formler til beskrivelse af en konstruktion under anvendelse af et diskretiseret flytningsfelt, tøjninger, der formelt svarer til Lagrange-tøjninger, og spændinger, der af-

hænger lineært af de benyttede tøjningsmål. I kapitel 4 opstilles en konkret elementmodel udfra den i kapitlerne 2 og 3 opstillede teori. Endelig behandles i kapitel 5 bestemmelse af den kritiske værdi for proportionalbelastning udfra en lineær egenværdianalyse. Med baggrund i et eksempel diskuteres muligheder for bestemmelse af den kritiske værdi for belastninger for systemer, hvor de ikke-lineære deformationsbidrag før stabilitetssvigtet ikke kan negligeres. I afsnit 5.3 vises, hvorledes det i det tidligere beskrevne værktøj kan sættes i forbindelse med den moderne stabilitetsteori.

Der er sidst i afhandlingen anført et række numeriske eksempler til belysning af elementmodellerings formåen.

Der er søgt beskrevet metoder til beskrivelse af skalkonstruktioners opførsel, idet belastningen stiger fra nul indtil en belastning, hvor konstruktionens stivhed er så lille, at den ikke kan danne grundlag for yderligere belastning. Forholdene efter en eventuel foldning, der normalt ikke er relevant for egentlige skalkonstruktioner inden for bygningsområdet, har således ikke været det centrale emne for arbejdet.

2. SKALTEORI

2.1 Det benyttede koordinatsystem, beskrivelse af den udeformede skalflade.

Det forudsættes i den følgende fremstilling, at der findes en entydig (bijektiv) afbildning mellem skalfladen Ω_3 og et parameterområde Ω_2 . Afbildningen kan beskrives som en vektorfunktion af formen

$$\underline{r} = \underline{r}(\theta^\alpha) = x^i(\theta^\alpha) \underline{b}_i, \quad (2.1.1)$$

hvor θ^α er et punkt i Ω_2 og \underline{b}_i er basisenhedsvektorer i et kartesisk referencekoordinatsystem. Det er bekvemt at indføre et krumliniet koordinatsystem, der som koordinater har fladekoordinaterne θ^α samt afstanden fra skalfladen målt med fortegn. Basisvektorerne kan bestemmes ud fra kendskab til stedvektoren \underline{r} på følgende måde. De to basisvektorer, der er beliggende i fladens tangentplan bestemmes ved partiel differentiation af \underline{r}

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha}^* = x_\alpha^i \underline{b}_i. \quad (2.1.2)$$

Dette vektorpar betegnes de kovariante basisvektorer i det betragtede punkt hørende til fladekoordinatsystemet. Forudsætningen om at afbildningen (2.1.1) er bijektiv sikrer, at de kovariante basisvektorer er lineært uafhængige. Denne egenskab sikrer, at der til ethvert punkt på fladen findes en veldefineret normalvektor, der kan udtrykkes ved vektorproduktet af basisvektorerne

$$\underline{n} = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 / |\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|. \quad (2.1.3)$$

Med $|\cdot|$ betegnes den euklidiske vektornorm. Det fremgår af (2.1.3), at \underline{n} er en enhedsvektor, der er vinkelret på \underline{a}_α . Dette medfører, at følgende relationer er gyldige

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 1, \quad (2.1.4)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha = 0. \quad (2.1.5)$$

Det ses ved differentiation af (2.1.4), at $\underline{n}_{,\alpha}$ ingen komponent

*) Et komma fulgt af græsk bogstav som index angiver partiel differentiation efter en fladekoordinat. Bortset fra denne afvigelse danner notationen i [2] grundlag for den her anvendte.

har efter normalens retning.

Da \underline{n}_α alene har komponenter efter \underline{a}_β , kan vektoren udtrykkes ved

$$\underline{n}_\alpha = b_\alpha^\beta \underline{a}_\beta. \quad (2.1.6)$$

Størrelsen b_α^β er fladens krumningstensor. Navnet er foranlediget af, at b_α^β angiver drejningen af normalvektoren for en tilvækst i fladekoordinaterne. Udtrykket (2.1.6) viser, at b_α^β er en tensor.

Da de kovariante basisvektorer \underline{a}_α ikke behøver at være enhedsvektorer, er det nødvendigt med en særlig undersøgelse af længdebestemmelse foretaget i fladekoordinatsystemet.

Et linieelement på fladen udtrykkes ved

$$\underline{ds} = d\theta^\alpha \underline{a}_\alpha \quad (2.1.7)$$

Længden af \underline{ds} kan bestemmes ved hjælp af det indre produkt

$$ds^2 = \underline{ds} \cdot \underline{ds} = (\underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta) d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (2.1.8)$$

Dette giver anledning til at indføre

$$a_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta = \underline{r}'_\alpha \cdot \underline{r}'_\beta, \quad (2.1.9)$$

der betegnes den til koordinatsystemet hørende kovariante metriske tensor. Navnet er dækkende, da $a_{\alpha\beta}$ beskriver længdeforhold af linieelementer på fladen, og da $a_{\alpha\beta}$ umiddelbart ses at opfylde transformationsreglen for kovariante tensorer af anden orden. For at kunne udtrykke fx. skalære produkter af vektorer på en enkel måde ved hjælp af disses koordinater viser det sig hensigtsmæssigt at indføre endnu et vektorfelt, der betegnes de kontravariante basisvektorer. De betegnes med et øvre index \underline{a}^α og er defineret ved at betingelsen

$$\underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2.1.10)$$

skal gælde, idet δ_α^β er Kronecker's delta, der antager værdien 0 undtagen når α er lig med β . I dette tilfælde antager størrelsen værdien 1.

De kontravariante basisvektorer kan opløses efter de kovariante,

$$\underline{a}^{\alpha} = a^{\alpha\beta} \underline{a}_{\beta}. \quad (2.1.11)$$

Størrelsen $a^{\alpha\beta}$ betegnes den kontravariante metriske tensor for koordinatsystemet. Ved at multiplicere (2.1.11) med \underline{a}_{γ} fremkommer relationen

$$a^{\alpha\beta} \underline{a}_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}. \quad (2.1.12)$$

Ud fra produktreglen for tensorer ses det, at $a^{\alpha\beta}$ er en kontravariant tensor af anden orden. (2.1.12) viser endvidere, at $a^{\alpha\beta}$ og $\underline{a}_{\beta\gamma}$ er reciprokke tensorer. Da de kontravariante og de kovariante basisvektorer udspænder den samme tangentplan, gælder

$$\underline{a}^{\alpha} \cdot \underline{n} = 0. \quad (2.1.13)$$

Ved differentiation af (2.1.5) kan man ved at benytte (2.1.6) bestemme endnu et udtryk for krumningstensoren

$$b_{\alpha\beta} = -\underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} = -\underline{n} \cdot \underline{r}_{,\alpha\beta} \quad (2.1.14)$$

Det sidste udtryk viser direkte, at $b_{\alpha\beta}$ er en symmetrisk tensor.

Den mest direkte måde at beskrive en flades deformation fra en konfiguration til en anden, er at angive et vektorfelt, der netop beskriver de enkelte punkters flytning. Med baggrund i dette forhold bestemmes til senere brug de første to afledede efter fladekoordinaterne for et sådant vektorfelt.

Vektorfeltet opløses efter det lokale koordinatsystem

$$\underline{u} = u^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} + w \underline{n}, \quad (2.1.15)$$

hvor u^{α} er en vektor i fladekoordinatsystemet, mens w er en skalar.

For at udtrykke $\underline{u}_{,\alpha}$ må man bl.a. kende de afledede af basisvektorerne. Disse kan udtrykkes ved

$$\underline{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \underline{a}_{\gamma} - b_{\alpha\beta} \underline{n} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \underline{a}^{\gamma} - b_{\alpha\beta} \underline{n} \quad (2.1.16)$$

$$\underline{n}_{,\alpha} = b_{\alpha}^{\gamma} \underline{a}_{\gamma}, \quad (2.1.17)$$

hvor $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ og $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ er Christoffelsymboler af første og anden art. Udtrykket for

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}_{\gamma} = \underline{r}_{,\alpha\beta} \cdot \underline{r}_{,\gamma} \quad (2.1.18)$$

viser ved koordinatsystemskift, at Christoffelsymbolerne ikke opfylder transformationsreglen for tensorer og derfor ikke er tensorer.

Ved hjælp af de bestemte størrelser finder man ved differentiation af (2.1.15) udtrykket

$$\underline{u}_{,\alpha} = \phi_{\alpha}^{\gamma} \underline{a}_{\gamma} + \mu_{\alpha} \underline{n}, \quad (2.1.19)$$

hvor ϕ_{α}^{γ} og μ_{α} er givet ved

$$\phi_{\alpha}^{\gamma} = u^{\gamma}|_{\alpha} = u^{\gamma}||_{\alpha} + b_{\alpha}^{\gamma} w = u_{,\alpha}^{\gamma} + u^{\delta} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma} + w b_{\alpha}^{\gamma} \quad (2.1.20)$$

$$\mu_{\alpha} = w|_{\alpha} = w||_{\alpha} - b_{\alpha\gamma} u^{\gamma} = w_{,\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} u_{\gamma}. \quad (2.1.21)$$

Her betegner en enkelt lodret streg kovariant differentiation i det tredimensionale koordinatsystem med basisvektorerne \underline{a}_{α} og \underline{n} . En dobbelt lodret streg angiver kovariant differentiation i fladekoordinatsystemet.

Størrelserne ϕ_{α}^{γ} og μ_{α} består af størrelser, der er tensorer. Som følge heraf er ϕ_{α}^{γ} og μ_{α} selv tensorer.

Ved at differentiere udtrykkene

$$\phi_{\alpha}^{\gamma} = \underline{a}^{\gamma} \cdot \underline{u}_{,\alpha} \quad (2.1.22)$$

$$\mu_{\alpha} = \underline{n} \cdot \underline{u}_{,\alpha} \quad (2.1.23)$$

partielt efter θ^{β} fremkommer

$$\begin{aligned} \underline{u}_{,\alpha\beta} \cdot \underline{a}^{\gamma} &= \phi_{\alpha,\beta}^{\gamma} - \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta}^{\gamma} \\ &= \phi_{\alpha,\beta}^{\gamma} - (\phi_{\alpha}^{\delta} \underline{a}_{\delta} + \mu_{\alpha} \underline{n}) \cdot (-\Gamma_{\varphi\beta}^{\gamma} \underline{a}^{\varphi} - b_{\beta}^{\gamma} \underline{n}) \\ &= \phi_{\alpha,\beta}^{\gamma} + \phi_{\alpha}^{\delta} \Gamma_{\delta\beta}^{\gamma} + \mu_{\alpha} b_{\beta}^{\gamma} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

$$\begin{aligned}\underline{u}'_{\alpha\beta} \cdot \underline{n} &= \mu_{\alpha,\beta} \cdot \underline{n}_{\beta} \cdot \underline{u}'_{\alpha} \\ &= \mu_{\alpha,\beta} \cdot b_{\gamma\beta} \underline{a}^{\gamma} \cdot (\phi^{\delta}_{\alpha} \underline{a}_{\delta} + \mu_{\alpha} \underline{n}) = \mu_{\alpha,\beta} \cdot \phi^{\gamma}_{\alpha} b_{\gamma\beta} \cdot \underline{n}, \quad (2.1.25)\end{aligned}$$

hvoraf man umiddelbart får

$$\underline{u}'_{\alpha\beta} = (\phi^{\gamma}_{\alpha,\beta} + \phi^{\delta}_{\alpha} \Gamma^{\gamma}_{\delta\beta} + \mu_{\alpha} b^{\gamma}_{\beta}) \underline{a}_{\gamma} + (\mu_{\alpha,\beta} - \phi^{\delta}_{\alpha} b_{\beta\delta}) \underline{n}. \quad (2.1.26)$$

For at kunne beskrive vektorielle produkter via koordinatværdierne introduceres permutationssymbolerne, der defineres ved

$$\underline{a}_{\alpha} \times \underline{a}_{\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \underline{n} \quad (2.1.27)$$

$$\underline{a}^{\alpha} \times \underline{a}^{\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} \underline{n}. \quad (2.1.28)$$

Det ses af definitionen for \underline{n} (2.1.3), at (2.1.27) og (2.1.28) er udtryk, der ikke strider mod tidligere definitioner, og da \underline{n} er fælles for alle fladekoordinatsystemer ses det, at permutationsymbolerne er tensorer.

Værdien af permutationssymbolernes elementer fremgår af de nedenstående tavler,

$\alpha \backslash \beta$	1	2
1	0	\sqrt{a}
2	$-\sqrt{a}$	0

$\epsilon_{\alpha\beta}$

$\alpha \backslash \beta$	1	2
1	0	$\frac{1}{\sqrt{a}}$
2	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	0

$\epsilon^{\alpha\beta}$

hvor a er determinanten af den metriske tensor, $a_{\alpha\beta}$. Det viser sig endvidere bekvemt at bestemme vektorproduktet mellem fladekoordinatsystemets basisvektorer og normalvektoren. De søgte udtryk kan findes ved at multiplicere (2.1.27) og (2.1.28) skalært med \underline{a}_{γ} og \underline{n} . Det udnyttes endvidere, at skalært og vektorielt produkt kan ombyttes i et rumprodukt, samt at rumproduktet af lineært afhængige vektorer er nul.

Herved fremkommer

$$\underline{a}_\alpha \times \underline{n} = \varepsilon_{\beta\alpha} \underline{a}^\beta \quad (2.1.29)$$

$$\underline{a}^\alpha \times \underline{n} = \varepsilon^{\beta\alpha} \underline{a}_\beta . \quad (2.1.30)$$

2.2 Beskrivelse af den deformerede skalflade.

Nedenfor beskrives den flade, der fremkommer ved at punkterne på den oprindelige (udeformerede) flade får en flytning, beskrevet ved \underline{u} . Stedvektoren til den deformerede flades punkter gives ved udtrykket

$$\underline{R} = \underline{R}(\theta^\alpha) = \underline{r}(\theta^\alpha) + \underline{u}(\theta^\alpha), \quad (2.2.1)$$

hvor \underline{r} er stedvektoren til den udeformerede skalflade. Det forudsættes, at der kan etableres en enentydig (bijektiv) forbindelse mellem punkter før og efter deformationen. Dette medfører bl. a., at to punkter ikke flyttes til samme punkt i rummet. Endvidere kan beskrivelsen af den deformerede skalflade fås direkte af de i afsnit 2.1 opnåede resultater ved at erstatte \underline{r} med \underline{R} . Da der således må knyttes et koordinatsystem til hver punktkonfiguration, vil det være bekvemt at benytte en fremstilling med et fast koordinatsystem, der fx. kan være det, der er knyttet til den udeformerede tilstand.

Flytningerne kan udtrykkes ved

$$\underline{u} = u^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{n}. \quad (2.2.2)$$

Basisvektorerne \underline{A}_α hørende til den deformerede flades koordinatsystem kan bestemmes ved hjælp af (2.1.19) til

$$\begin{aligned} \underline{A}_\alpha &= \underline{R}_{,\alpha} = \underline{r}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha} = \underline{a}_\alpha + \underline{u}_{,\alpha} \\ &= (\delta_\alpha^\gamma + \phi_{,\alpha}^\gamma) \underline{a}_\gamma + \mu_{\alpha\gamma} \underline{n} = \lambda_{\alpha\gamma}^\gamma \underline{a}_\gamma + \mu_{\alpha\gamma} \underline{n}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Normalvektoren \underline{N} til den deformerede skalflade bestemmes ved hjælp af

$$\begin{aligned}
\underline{A}_1 \times \underline{A}_2 &= (\lambda^\gamma_1 \underline{a}_\gamma + \mu_1 \underline{n}) \times (\lambda^\delta_2 \underline{a}_\delta + \mu_2 \underline{n}) \\
&= \lambda^\gamma_1 \lambda^\delta_2 \underline{a}_\gamma \times \underline{a}_\delta + (\lambda^\gamma_1 \mu_2 - \lambda^\gamma_2 \mu_1) \underline{a}_\gamma \times \underline{n} \\
&= \lambda^\gamma_1 \lambda^\delta_2 \epsilon_{\gamma\delta} \underline{n} + (\lambda^\gamma_1 \mu_2 - \lambda^\gamma_2 \mu_1) \epsilon_{\beta\gamma} \underline{a}^\beta \\
&= \sqrt{a} \lambda^\gamma_\alpha \mu_\delta \epsilon^{\alpha\delta} \epsilon_{\beta\gamma} \underline{a}^\beta + \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta} \lambda^\gamma_\alpha \lambda^\delta_\beta \underline{n}. \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Her er de fundne udtryk for vektorprodukt af basisvektorerne (2.1.27-30), samt det forhold, at permutationssymbolet er skævsymmetrisk, benyttet. De i udtrykket (2.2.4) benyttede permutationsymboler er knyttet til den udeformerede flade.

Determinanten for den metriske tensor, A , hørende til fladekoordinatsystemet på den deformerede flade kan udtrykkes som

$$A = |\underline{A}_1 \times \underline{A}_2|. \quad (2.2.5)$$

Ved hjælp af (2.2.4 + 5) kan normalvektoren til den deformerede skalflade udtrykkes på følgende måde

$$\underline{n} = \cos \omega \underline{n} + v^\delta \underline{a}_\delta \quad (2.2.6)$$

idet komposanterne er udtrykt ved

$$\cos \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{A}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta} \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\beta\delta} \quad (2.2.7)$$

$$v^\delta = \sqrt{\frac{a}{A}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\delta\gamma} \lambda_{\gamma\alpha} \mu_\beta. \quad (2.2.8)$$

Den metriske tensor hørende til fladekoordinatsystemet i den deformerede tilstand findes som

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \underline{A}_\alpha \cdot \underline{A}_\beta = (\lambda^\gamma_\alpha \underline{a}_\gamma + \mu_\alpha \underline{n}) \cdot (\lambda^\delta_\beta \underline{a}_\delta + \mu_\beta \underline{n}) \\
&= \lambda^\gamma_\alpha \lambda_{\gamma\beta} + \mu_\alpha \mu_\beta \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

idet (2.2.3) indføres. Den metriske tensor for den deformerede flade er her udtrykt ved størrelser herunder flytninger beskrevet i den udeformerede flades koordinatsystem.

Krumningstensoren for den deformerede flade bestemmes ved udtrykket

$$B_{\alpha\beta} = -\underline{N} \cdot \underline{R}_{,\alpha\beta}, \quad (2.2.10)$$

se (2.1.14). For at bestemme et udtryk for $B_{\alpha\beta}$, der alene indeholder størrelser hørende til den udeformerede flade samt flytninger beskrevet i dennes koordinatsystem, må determinanten A , der indgår i udtrykket for \underline{N} (2.2.6-8), bestemmes. Det kan udføres på følgende måde

$$\begin{aligned} A &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = \frac{1}{2} a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} \\ &= \frac{1}{2} a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} (\lambda^\varphi_{\alpha} \lambda_{\varphi\gamma} + \mu_{\alpha} \mu_{\gamma}) (\lambda^{\zeta}_{\beta} \lambda_{\zeta\delta} + \mu_{\beta} \mu_{\delta}) \\ &= \frac{1}{2} a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} (\lambda^\varphi_{\alpha} \lambda_{\varphi\gamma} \lambda^{\zeta}_{\beta} \lambda_{\zeta\delta} + 2 \lambda^\varphi_{\alpha} \lambda_{\varphi\gamma} \mu_{\beta} \mu_{\delta} \\ &\quad + \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \mu_{\gamma} \mu_{\delta}). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Ved kombination af udtrykkene (2.1.16), (2.1.26), (2.2.1+2), (2.2.6) og (2.2.10) kan følgende udtryk for krumningstensoren i den deformede skalflade opstilles

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= -(v_{\delta} \underline{a}^{\delta} + \cos \omega \underline{n}) \cdot (\underline{r}_{,\alpha\beta} + \underline{u}_{,\alpha\beta}) \\ &= -v_{\delta} [\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} + \phi^{\delta}_{\alpha,\beta} + \phi^{\rho}_{\alpha} \Gamma^{\delta}_{\rho\beta} + \mu_{\alpha} b^{\delta}_{\beta} \\ &\quad + \cos \omega [b_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha,\beta} + \phi^{\delta}_{\alpha} b_{\beta\delta}]] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Udtrykket kan forenkles en smule ved at indføre λ^{α}_{β} i (2.2.12). Det bemærkes, at Kronecker's delta i alle koordinatsystemer består af 0 og 1, hvorfor den partielle afledede efter θ^{α} består af lutter nuller. Idet λ^{α}_{β} indføres i (2.2.12) fremkommer

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= -v_{\delta} [\lambda^{\delta}_{\alpha,\beta} + \lambda^{\rho}_{\alpha} \Gamma^{\delta}_{\rho\beta} + \mu_{\alpha} b^{\delta}_{\beta} \\ &\quad + \cos \omega [\lambda^{\delta}_{\alpha} b_{\beta\delta} - \mu_{\alpha,\beta}]] \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

For tydeligt at se, at $B_{\alpha\beta}$ virkelig er en tensor, adderes til (2.2.13) et nul på den lidt usædvanlige form

$$0 = 0 \cdot \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} (\underline{A}_{\rho} \cdot \underline{N}) = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} (\lambda^{\delta}_{\rho} v_{\delta} + \mu_{\rho} \cos \omega) \quad (2.2.14)$$

hvorved (2.2.13) får udseendet

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta} &= -v_{\delta} [\lambda^{\delta}_{\alpha,\beta} + \lambda^{\rho}_{\alpha} \Gamma^{\delta}_{\rho\beta} - \lambda^{\delta}_{\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha} b^{\delta}_{\beta}] \\
 &\quad + \cos \omega [\lambda^{\delta}_{\alpha} b_{\beta\delta} - \mu_{\alpha,\beta} + \mu_{\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}] \\
 &= -v_{\delta} [\lambda^{\delta}_{\alpha} \parallel_{\beta} + \mu_{\alpha} b^{\delta}_{\beta}] + \cos \omega [\lambda^{\delta}_{\alpha} b_{\beta\delta} - \mu_{\alpha} \parallel_{\beta}] \quad (2.2.15)
 \end{aligned}$$

2.3 Beskrivelse af en flades deformation.

Fuldstændige og forenklede tøjningsmål.

For at bestemme de størrelser, der er nødvendige for at beskrive en flades deformation, kan det være nyttigt at betragte fladeteoriens fundamentalsætning, [1], der først blev bevist af O. Bonnet i 1841.

Hvis $a_{\alpha\beta}$ og $b_{\alpha\beta}$ er givne funktioner af θ^{α} , eksisterer en flade $x^i = x^i(\theta^{\alpha})$, der er entydigt bestemt på nær placeringen i rummet, der har $a_{\alpha\beta}$ som metrisk tensor og $b_{\alpha\beta}$ som krumningstensor, hvis $a_{\alpha\beta}$ og $b_{\alpha\beta}$ er symmetriske matricer, $a_{\alpha\beta}$ er positiv definit, og at Gauss-Codazzi-ligningerne er opfyldt.

De nødvendige betingelser for at følgende system af sammenhørende partielle differentiaalligninger

$$\underline{r}_{,\alpha} \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 1 \quad (2.3.2)$$

$$\underline{r}_{,\alpha} \cdot \underline{r}_{,\beta} = a_{\alpha\beta} \quad (2.3.3)$$

$$\underline{r}_{,\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \underline{r}_{,\gamma} - b_{\alpha\beta} \underline{n} \quad (2.3.4)$$

kan integreres ud fra et punkt er opfyldt, hvis Codazzi's ligning

$$b_{\alpha\beta} \parallel_{\gamma} = b_{\alpha\gamma} \parallel_{\beta} \quad (2.3.5)$$

er opfyldt, og hvis størrelsen K i Gauss' ligning

$$K = b/a \quad (2.3.6)$$

er invariant. Størrelsen b er determinanten af krumningstensoren.

Det ses af det foregående, at deformationen af en flade fra en konfiguration til en anden beskrives fuldstændigt, hvis ændringen i den metriske tensor og krumningstensoren kendes, forudsat fladen efter deformationen stadig er en flade, dvs. Gauss-Codazzi-ligningerne er opfyldt. Et sæt af tilstrækkelige deformationsbeskrivende størrelser er således

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\phi_{\alpha\beta} + \phi_{\beta\alpha} + \mu_{\alpha} \mu_{\beta} + \phi_{\alpha}^{\delta} \phi_{\delta\beta}) \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \\ &= b_{\alpha\beta}(\cos \omega - 1) - \cos \omega (\mu_{\alpha} \parallel_{\beta} - \phi_{\alpha}^{\delta} b_{\beta\delta}) \\ &\quad - v_{\delta} (\phi_{\alpha}^{\delta} \parallel_{\beta} + \mu_{\alpha} b_{\beta}^{\delta}), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

hvor (2.2.9) og (2.2.12) er benyttet. Af (2.1.20 + 21) ses, at ϕ_{α}^{γ} og μ_{α} er lineære i flytningsstørrelserne. Af (2.2.7 + 8) ses, at $\cos \omega$ og v_{δ} udtrykkes som produktet af et udtryk, der er kvadratiske i flytningerne, og forholdet mellem kvadratroden af de metriske tensorers determinanter. Dette determinantforhold ses af (2.2.11) at være et udtryk, hvor flytningerne indgår i fjerde potens. Udtrykket for $K_{\alpha\beta}$ er således yderst kompliceret.

For en lang række formål er tøjningsudtrykkene (2.3.7 + 8) unødvendigt komplicerede. I det følgende vil det blive undersøgt, hvilke konsekvenser en række forenkende forudsætninger vil have. Indførelsen af forenkende forudsætninger i en eksakt teori medfører, at anvendelsesområdet ikke er klart afgrænset, idet det forhold, at en løsning til et problem baseret på den forenkede teori opfylder de opstillede forudsætninger, ikke garanterer, at den fundne løsning er tæt på den løsning, der findes ved at anvende den eksakte teori på samme problem. Det vil imidlertid ofte i en konkret situation kunne skønnes, om anvendelsen af den forenkede teori vil være tilladelig.

Det forudsættes, at størrelsesordenen af en størrelse differentie-

ret kovariant med hensyn til en fladekoordinat svarer til størrelsesordenen af den betragtede størrelse divideret med en karakteristisk længde i deformationsmønsteret. Dette kan udtrykkes ved

$$o(T|_{\alpha}) = o(T)/L, \quad (2.3.9)$$

idet L betegner en sådan karakteristisk længde. En karakteristisk krumningsradius betegnes ved R . Der transformeres til et koordinatsystem, der i det betragtede punkt lokalt har koordinater, der svarer til buelængder langs koordinatkurverne. De ved forenklingen opstillede forudsætninger kan udtrykkes ved

$$o(u_{\alpha})/L = \epsilon \quad (2.3.10)$$

$$o(w)/R = \epsilon \quad (2.3.11)$$

$$\epsilon < o(w)/L < \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.12)$$

hvor ϵ betegner en lille størrelse. Forudsætningerne (2.3.10 - 12) kan endnu mere løst udtrykkes ved, at drejningen af normalen er lille, at flytninger i skalfladens retning er mindre end flytninger i normalens retninger, og at en karakteristisk bølglængde i deformationsmønsteret er mindre end en karakteristisk krumningsradius.

Når udtrykkene (2.1.20 + 21) indføres i (2.3.7), fremkommer

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2}(u_{\alpha}|_{\beta} + u_{\beta}|_{\alpha} + 2b_{\alpha\beta} w + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \\ & + \frac{1}{2}(u^{\gamma} u^{\delta} b_{\gamma\alpha} b_{\delta\beta} - u^{\gamma} b_{\gamma\alpha} w_{,\beta} - u^{\delta} b_{\delta\beta} w_{,\alpha}) \\ & + \frac{1}{2}(u^{\gamma}|_{\alpha} u_{\gamma}|_{\beta} + b_{\gamma\beta} w u^{\gamma}|_{\alpha} + b_{\alpha}^{\gamma} w u_{\gamma}|_{\beta} + b_{\alpha}^{\gamma} b_{\gamma\beta} w w) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Forudsætningerne bevirker, at leddene i den nederste linie i (2.3.13) er af mindre størrelsesorden end de øvrige. Udtrykket for krumningsændringen

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} = & b_{\alpha\beta}(\cos \omega - 1) - \cos \omega (\mu_{\alpha}|_{\beta} - \phi_{\alpha}^{\delta} b_{\beta\delta}) \\ & - v_{\delta} (\phi_{\alpha}^{\delta}|_{\beta} + \mu_{\alpha} b_{\beta}^{\delta}) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

frister ikke til en direkte udskrivning i flytningerne. De enkelte led betragtes hver for sig. Først bestemmes længden af vektoren

$$\underline{N}^* = \frac{1}{\sqrt{a}} \underline{A}_1 \times \underline{A}_2, \quad (2.3.15)$$

idet forholdet mellem kvadratrødderne af de metriske tensorers determinanter, $\sqrt{\frac{A}{a}}$, netop er længden af \underline{N}^* . Vektoren kan udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \underline{N}^* &= \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} \left[\frac{1}{2} \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\beta\delta} \underline{n} + \lambda_{\alpha\gamma} \mu_{\beta} \underline{a}_{\delta} \right] \\ &= \varepsilon_{\alpha\rho} \varepsilon^{\gamma\delta} \frac{1}{2} (\delta_{\gamma}^{\alpha} + \phi_{\gamma}^{\alpha}) (\delta_{\delta}^{\beta} + \phi_{\delta}^{\beta}) \underline{n} \\ &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} (\delta_{\gamma}^{\alpha} + \phi_{\gamma}^{\alpha}) \mu_{\delta}^{\beta} \underline{a}_{\delta}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Koordinaterne til \underline{N}^* i den udeformerede flades koordinatsystem bestemmes som

$$\underline{N}^* \cdot \underline{n} = 1 + \phi_1^1 + \phi_2^2 + \phi_1^1 \phi_2^2 - \phi_2^1 \phi_1^2 \quad (2.3.17)$$

$$\underline{N}^* \cdot \underline{a}^1 = \mu^1 + \phi_1^2 \mu^1 - \phi_2^1 \mu^2 \quad (2.3.18)$$

$$\underline{N}^* \cdot \underline{a}^2 = \mu^2 + \phi_1^1 \mu^2 - \phi_2^1 \mu^1 \quad (2.3.19)$$

Det kan af udtrykket (2.1.20 + 21) ses, at forudsætningerne medfører

$$o(\phi_{\alpha}^{\gamma}) = \varepsilon, \quad (2.3.20)$$

$$\varepsilon < o(\mu_{\alpha}^{\gamma}) < \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.21)$$

Disse forhold bevirker, at de kvadratiske led i (2.3.17-19) er små i forhold til de øvrige.

Da koordinaterne til \underline{N}^* er bestemt, kan vurderingen

$$o\left(\frac{A}{a}\right) = 1 + \varepsilon \quad (2.3.22)$$

umiddelbart findes. De foranstående vurderinger og forudsætninger medfører

$$o(\cos \omega) = 1 + \varepsilon \quad (2.3.23)$$

$$\varepsilon < o(v^\delta) < \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.24)$$

Det er nu muligt at vurdere de enkelte led i udtrykket for $K_{\alpha\beta}$.

$$o(b_{\alpha\beta}(\cos \omega - 1)) = \frac{1}{R} \cdot \varepsilon \quad (2.3.25)$$

$$o(\cos \omega \mu_\alpha ||_\beta) = \frac{1}{L} o(\mu_\alpha) \quad (2.3.26)$$

$$o(\cos \omega \phi_\alpha^\delta b_{\beta\delta}) = \varepsilon \cdot \frac{1}{R} \quad (2.3.27)$$

$$o(v_\delta(\phi_\alpha^\delta ||_\beta + \mu_\alpha b_\beta^\delta)) = o(v_\delta) \cdot \varepsilon \quad (2.3.28)$$

Er man alene interesseret i at medtage de mest betydningsfulde led, kan følgende forenklede tøjningsudtryk benyttes

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha ||_\beta + u_\beta ||_\alpha + 2b_{\alpha\beta} w + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \quad (2.3.29)$$

$$K_{\alpha\beta} = w ||_{\alpha\beta} \quad (2.3.30)$$

Det ses, at (2.3.29) er kvadratisk i flytningsstørrelserne, mens (2.3.30) er lineær i disse.

2.4 Det benyttede tøjningsenergiudtryk, konstitutive ligninger, potentiel energi.

Det materiale, der behandles i denne fremstilling, er karakteriseret ved, at den specifikke tøjningsenergi, Φ , kan udtrykkes ved tøjningsmålene på følgende måde

$$\Phi = \frac{1}{2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (C E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + D K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta}), \quad (2.4.1)$$

hvor $E_{\alpha\beta}$ er stræktøjninger og $K_{\alpha\beta}$ beskriver krumningsændringer. Tensoren $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$ udtrykkes ved den metriske tensor og Poissons forhold ν på følgende måde

$$H^{\lambda\mu\rho\tau} = \frac{1}{2}((1-\nu)(a^{\lambda\tau} a^{\mu\rho} + a^{\lambda\rho} a^{\mu\tau}) + 2\nu a^{\lambda\mu} a^{\rho\tau}); \quad (2.4.2)$$

De to konstanter C og D beskriver skallens stivhed overfor strækning og bøjning. De udtrykkes ved

$$C = Et/(1-\nu^2) \quad (2.4.3)$$

$$D = Et^3/(12(1-\nu^2)) \quad (2.4.4)$$

hvor E er elasticitetskoefficienten og t betegner skaltykkelsen. For det specialtilfælde, hvor alle elementerne i $b_{\alpha\beta}$ er nul, er udtrykket (2.4.1) identisk med det, der gælder for en isotrop, homogen skive-plade.

Udfra udtrykket for den specifikke tøjningsenergi kan de spændingsstørrelser, der hører til de valgte tøjningsstørrelser bestemmes ved differentiation. Heraf fremkommer udtrykkene

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{\alpha\beta}} = H^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} C \quad (2.4.5)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi}{\partial K_{\alpha\beta}} = H^{\alpha\beta\gamma\delta} K_{\gamma\delta} D \quad (2.4.6)$$

I næste afsnit bliver $S^{\alpha\beta}$ og $M^{\alpha\beta}$ nærmere identificeret.

Udfra udtrykket (2.4.1) kan udtrykket for den potentielle energi for en skalkonstruktion med given belastning og given deformation opstilles. Idet der alene betragtes fordelt fladebelastning, får udtrykket for den potentielle energi formen

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega_3} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (C E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + D K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta}) dA - \int_{\Omega_3} (p^\alpha u_\alpha + p_3 w) dA. \quad (2.4.7)$$

Der kan naturligvis medtages andre belastningsbidrag.

Indføres de benyttede flytnings-tøjningsrelationer i (2.4.7) kan π_p udtrykkes alene ved flytningerne og den givne belastning.

2.5 Tolkning af spændingsstørrelser, udledning af ligevægtsligninger.

Ligevægtstilstande er karakteriseret ved, at den potentielle energi er stationær med hensyn til variationer i flytningerne. Ligevægtsbetingelsen er således

$$\delta \pi_p = \int_{\Omega_3} (S^{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta}) dA - \int_{\Omega_3} (p^\alpha \delta u_\alpha + p_3 \delta w) dA = 0. \quad (2.5.1)$$

Ved variation af (2.3.29 + 30) med hensyn til flytningerne fremkommer

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta u_\alpha ||_\beta + \delta u_\beta ||_\alpha + 2b_{\alpha\beta} \delta w + w ||_\alpha \delta w ||_\beta + \delta w ||_\alpha w ||_\beta) \quad (2.5.2)$$

$$\delta K_{\alpha\beta} = \delta w ||_{\alpha\beta} \quad (2.5.3)$$

Indføres (2.5.2,3) i (2.5.1), og benyttes symmetrien i $S^{\alpha\beta}$ og $M^{\alpha\beta}$ fremkommer

$$\begin{aligned} \delta \pi_p = \int_{\Omega_3} [S^{\alpha\beta} \delta u_\alpha ||_\beta + S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \delta w + S^{\alpha\beta} w ||_\alpha \delta w ||_\beta \\ + M^{\alpha\beta} \delta w ||_{\alpha\beta} - p^\alpha \delta u_\alpha - p^3 \delta w] dA = 0. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

For at finde en række relationer mellem spændingsstørrelserne benyttes Gauss' integralsætning

$$\int_{\partial\Omega_3} n_\alpha T^\alpha dS = [n_\alpha T^\alpha] = \int_{\Omega_3} T^\alpha ||_\alpha dA, \quad (2.5.5)$$

hvor T^α er et vektorfelt defineret på området Ω_3 , der har randkurven $\partial\Omega_3$, og n_α er en enhedsnormalvektor, der er orienteret i overensstemmelse med omløbsretningen for $\partial\Omega_3$. Da det er en forudsætning for anvendelsen af sætningen, at Ω_3 er enkeltsammenhængende, kan den følgende udledning ikke uden yderligere overvejelser overføres til skaller med huller.

Ved passende benyttelse af (2.5.5) kan (2.5.4) omformes til

$$\begin{aligned} \delta \pi_p = [S^{\alpha\beta} n_\beta \delta u_\alpha] + [(S^{\alpha\beta} w ||_\alpha - M^{\alpha\beta} ||_\alpha) n_\beta \delta w] \\ + [M^{\alpha\beta} n_\beta \delta w ||_\alpha] - \int_{\Omega_3} (S^{\alpha\beta} ||_\beta + p^\alpha) \delta u_\alpha dA \\ + \int_{\Omega_3} (M^{\alpha\beta} ||_{\alpha\beta} - (S^{\alpha\beta} w ||_\alpha) ||_\beta + S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - p^3) \delta w dA = 0. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

For at (2.5.6) kan være opfyldt, må spændingsstørrelserne opfylde følgende differentialligninger

$$S^{\alpha\beta}||_{\beta} + p^{\alpha} = 0 \quad (2.5.7)$$

$$M^{\alpha\beta}||_{\alpha\beta} - (S^{\alpha\beta}w||_{\alpha})||_{\beta} + S^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} - p^3 = 0, \quad (2.5.8)$$

der formelt svarer til de ligevægtsligninger, der benyttes i Donnell-Vlasov teorien [2]. $S^{\alpha\beta}$ kan derfor identificeres med en symmetrisk membrankrafttensor og $M^{\alpha\beta}$ med en symmetrisk momenttensor. Som det er vist i [3], har betingelsen for momentligevægt om normalen følgende form

$$\varepsilon_{\lambda\beta} (S^{\lambda\beta} + M^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) = 0. \quad (2.5.9)$$

Denne ligning er ikke opfyldt i det almindelige tilfælde. Der er i [4] angivet et sæt tøjningsstørrelser, hvis tilknyttede spændinger opfylder ligevægtsligningerne. Disse resultater er baseret på en konsistent lineær skalteori. I appendix A-4.3 er tøjningsudtrykkene angivet.

REFERENCER

- [1] L.P. Eisenhart: Differential Geometry, pp. 157-159.
Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- [2] Sanders, J.L.: Nonlinear Theories for Thin Shells.
Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, No. 1, 1963.
- [3] Green, A.E. & W. Zerna: Theoretical Elasticity. Oxford
Press, 1954.
- [4] Koiter, W.T.: A Consistent first Approximation Theory
for Thin Shells. Proceedings of the Symposium on the
Theory of Thin Elastic Shells (I.U.T.A.M.), 1960.
North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

A-2.1 Geometribeskrivelse ved hjælp af imperfektionsfelt.

Ofte tilstræbes skalkonstruktioner udført med en matematisk set enkel geometri, fx. rotationssymmetrisk. Ved analyse af en skal med en geometri, der adskiller sig lidt fra den "enkle", kan det være bekvemt at benytte følgende udtryk til bestemmelse af stedvektoren samt dennes første og anden afledede med hensyn til fladekoordinaterne.

Det forudsættes, at stedvektoren kan udtrykkes ved

$$\underline{r} = \underline{r}^0 + w^0 \underline{n}^0 \quad (\text{A-2.1.1})$$

hvor \underline{r}^0 er stedvektoren til det tilsvarende punkt på den perfekte skal, og w^0 er den aktuelle imperfektion, der er funktion af fladekoordinaterne. Vektoren \underline{n}^0 er normalvektoren til den perfekte skalflade. Basisvektorerne bestemmes ved differentiation af stedvektoren

$$\underline{r}_{,\alpha} = \underline{r}_{,\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0 \underline{n}^0 + w^0 \underline{n}_{,\alpha}^0 = \underline{r}_{,\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0 \underline{n}^0 + w^0 b_{\alpha}^{\gamma} \underline{r}_{,\gamma}^0, \quad (\text{A-2.1.2})$$

idet (2.1.17) er benyttet, og b_{α}^{γ} er den blandede krumningstensor hørende til den perfekte geometri. Normalvektoren kan bestemmes ved normering af vektorproduktet af basisvektorerne.

Tilsvarende bestemmes

$$\begin{aligned} \underline{r}_{,\alpha\beta} &= \underline{r}_{,\alpha\beta}^0 + w_{,\alpha\beta}^0 \underline{n}^0 + w_{,\alpha}^0 \underline{n}_{,\beta}^0 + w_{,\beta}^0 \underline{n}_{,\alpha}^0 + w^0 \underline{n}_{,\alpha\beta}^0 \\ &= \underline{r}_{,\alpha\beta}^0 + w_{,\alpha\beta}^0 \underline{n}^0 + (w_{,\alpha}^0 b_{\beta}^{\delta} + w_{,\beta}^0 b_{\alpha}^{\delta}) \underline{r}_{,\delta}^0 + w^0 \underline{n}_{,\alpha\beta}^0. \end{aligned} \quad (\text{A-2.1.3})$$

Ved at differentiere relationerne (2.1.4 + 5) to gange fremkommer

$$\underline{n}^0 \cdot \underline{n}_{,\alpha\beta}^0 = -\underline{n}_{,\alpha}^0 \cdot \underline{n}_{,\beta}^0 = -b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta\gamma} \quad (\text{A-2.1.4})$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_{,\gamma}^0 \cdot \underline{n}_{,\alpha\beta}^0 &= -\{\underline{n}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma\alpha\beta}^0 + \underline{n}_{,\beta}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma\alpha}^0 + \underline{n}_{,\alpha}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma\beta}^0\} \\ &= -\{\underline{n}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma\alpha\beta}^0 + b_{\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\alpha\delta} + b_{\alpha}^{\delta} \Gamma_{\gamma\beta\delta}\}, \end{aligned} \quad (\text{A-2.1.5})$$

hvor $\Gamma_{\gamma\alpha\delta}$ er Christoffelsymbolet af første art hørende til fladekoordinatsystemet på den perfekte skal. Disse udtryk giver

$$\begin{aligned} \underline{n}_{\alpha\beta}^0 &= (\underline{n}_{,\alpha\beta}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma}^0) a^{\gamma\tau} \underline{r}_{,\tau}^0 + (\underline{n}_{,\alpha\beta}^0 \cdot \underline{n}^0) \underline{n}^0 \\ &= -[\{\underline{n}^0 \cdot \underline{r}_{,\gamma\alpha\beta}^0 + b_{\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\alpha\delta} + b_{\alpha}^{\delta} \Gamma_{\gamma\beta\delta}\} a^{\gamma\tau}] \underline{r}_{,\tau}^0 - b_{\alpha}^{\gamma} b_{\gamma\beta} \underline{n}^0 \end{aligned} \quad (\text{A-2.1.6})$$

med $a^{\alpha\beta}$ som den kontravariante metriske tensor hørende til den perfekte skals fladekoordinatsystem.

Det fremgår af det foregående, at udledningen ikke repræsenterer nogen tilnærmelse under forudsætning af, at der kan etableres en en-entydig forbindelse af formen (A-2.1.1) mellem punkter på den perfekte referenceskal og imperfekte skal. Baggrunden for denne lidt omstændige geometribeskrivelse er, at det i konkrete tilfælde er ret vanskeligt at kontrollere vektorerne r , $r_{,\alpha}$ og $r_{,\alpha\beta}$, mens det ofte er let at beskrive den perfekte geometri samt imperfektioner hver for sig.

3. ELEMENTFORMULERING AF EN IKKE-LINEÆR ELASTICITETSTEORI

3.1 Den betragtede teori.

Den her betragtede teori kan karakteriseres ved

- a) at den specifikke tøjningsenergi udtrykkes som en positiv-definit kvadratisk form i tøjningsmålene
- b) at tøjningsmålene samlet på vektorform kan udtrykkes ved

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\ell}_1(\underline{u}) + \frac{1}{2}\underline{\ell}_2(\underline{u}) , \quad (3.1.1)$$

hvor $\underline{\ell}_1$ og $\underline{\ell}_2$ er en lineær henholdsvis bilineær differential-operator, der virker på flytningsstørrelserne samlet i \underline{u} .

Notationen, der også benyttes i afsnit 5, er hentet fra [1].

Det kan ses, at den forenklede skalteori, der er angivet i afsnit 2.3, har denne form. Det samme gælder fx en teori, der beskriver hyperelastiske materialer med anvendelse af Lagrangetøjninger.

3.2 Diskretisering.

Det betragtede flytningsfelt udtrykkes som en linearkombination af en række elementarflytningsfelter

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{q} , \quad (3.2.1)$$

hvor \underline{u} er flytningsvektorens koordinater, \underline{N} er en interpolationsmatrix, der varierer fra punkt til punkt, og \underline{q} er parametrene i flytningsfeltet arrangeret som en søjlevektor. Den betragtede tøjningsdefinition (3.1.1) kan ved hjælp af \underline{N} udtrykkes som

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{L}_i^{1T} \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{L}_i^2 \underline{q} \quad (3.2.2)$$

Matricerne \underline{L}_i^1 og \underline{L}_i^2 er koordinatafhængige. Da den kvadratiske del af (3.2.2) er et kongruent produkt, kan \underline{L}_i^2 uden indskrænkning vælges som en symmetrisk matrix. Index i antyder, at der til forskellige tøjningsmål hører forskellige tøjningsfordelingsmatricer.

Konstruktionen opdeles i elementer, indenfor hvilke flytningsfeltet kan udtrykkes ved

$$\underline{u}_e = \underline{N}_e \underline{W}_e , \quad (3.2.3)$$

hvor \underline{W}_e er de bestemmende parametre. Disse kan udledes af \underline{q} ved

$$\underline{W}_e = \underline{D}_e \underline{q} . \quad (3.2.4)$$

Indenfor elementet kan de størrelser, der indgår i den lineære del af tøjningsdefinitionen, samles i vektoren

$$\underline{d} = \underline{N}_d \underline{W}_e . \quad (3.2.5)$$

Den del af flytningsfeltet, der indgår i den ikke-lineære del af tøjningsudtrykket, kan indenfor et element udtrykkes ved parametrene

$$\underline{W}_e^* = \underline{F}_e \underline{W}_e , \quad (3.2.6)$$

hvor \underline{F}_e er en konstant matrix.

De størrelser, der indgår i den ikke-lineære del af tøjningsdefinitionen, samles i

$$\underline{d}^* = \underline{N}_d^* \underline{W}_e^* . \quad (3.2.7)$$

Tøjningsdefinitionen (3.2.2) kan ved hjælp af tilstandsvektorerne \underline{d} og \underline{d}^* angives på formen

$$\epsilon_i = \underline{L}_{id}^{1T} \underline{d} + \frac{1}{2} \underline{d}^{*T} \underline{L}_{id}^2 \underline{d}^* . \quad (3.2.8)$$

Når tøjningsdefinitionen angives på formen (3.2.8) har diskretiseringen alene indflydelse på tilstandsvektorerne, \underline{d} og \underline{d}^* , mens den valgte teori bestemmer matricerne \underline{L}_{id}^{1T} og \underline{L}_{id}^2 .

3.3 Potentiell energi.

I det tilfælde, hvor den specifikke tøjningsenergi er en positiv definit kvadratisk form i tøjningsmålene, kan den potentielle energi for en konstruktion påvirket af konservativ belastning, \bar{p} , udtrykkes ved

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_A D^{ij} \epsilon_i \epsilon_j dA - \int_{A_T} \bar{p}^T \underline{u} dA \quad (3.3.1)$$

idet A og A_T betegner konstruktionens udstrækning henholdsvis den del af denne, hvor belastningen er kendt. Der betragtes i det følgende alene tilfælde, hvor D^{ij} er en symmetrisk matrix, der ikke er flytningsafhængig. For den præsenterede skalteori fremkommer D^{ij} ved passende omordning af (2.4.2).

Indsættes tøjnings-flytningsrelationen (3.2.2) i udtrykket for den potentielle energi (3.3.1) fremkommer

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \int_A D^{ij} [(\underline{L}_i^T \underline{q})(\underline{L}_j^T \underline{q}) + (\underline{L}_i^T \underline{q})(\underline{q}^T \underline{L}_j^T \underline{q}) \\ & + \frac{1}{4} (\underline{q}^T \underline{L}_i^T \underline{q})(\underline{q}^T \underline{L}_j^T \underline{q})] dA \\ & - \int_{A_T} \bar{p}^T \underline{N} \underline{q} dA \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

I det følgende benyttes, at størrelserne i parentes er skalarer. Det ses endvidere, at givne belastninger indenfor den valgte diskretiserings rammer er ækvivalente, hvis belastningsvektorerne

$$\underline{R} = \int_{A_T} \underline{N}^T \bar{p} dA \quad (3.3.3)$$

er identiske.

3.4 Ligevægtsbetingelser.

Til bestemmelse af sammenhørende belastnings- og flytningstilstande for den elementopdelte konstruktion benyttes variationsprincippet Stationær Potentiel Energi. Dvs. en ligevægtstilstand er karakteriseret ved, at den potentielle energi (3.3.1) er stationær for et varierende tøjnings-flytnings-felt, der opfylder variationsprincippet sidebetingelser

- 1) Flytningerne har formen (3.2.1)
- 2) Tøjnings-flytningsrelationen (3.2.2) er opfyldt
- 3) Flytningerne kan gengive foreskrevne randflytninger
- 4) Flytningsfeltet er kontinuert over elementrande
- 5) Den partielle afledede af flytningsstørrelsen w er kontinuert over elementrande.

Nødvendigheden af de sidste to sidebetingelser kan indses ved at betragte variationen i den potentielle energi som en sum af bidrag fra de enkelte elementer. Disse bidrag kan findes ved at benytte (2.5.6) for de enkelte elementer. Randbidragene, der er angivet med kantede parenteser, omfatter bidrag fra elementrande, der dels falder sammen med konstruktionens ydre rand og dels angiver grænser i konstruktionens indre.

Indføres sidebetingelserne 1) og 2) i funktionalen fremkommer udtrykket (3.3.2). Det ses, at betingelsesligningerne for ligevægt - variationsprincippet's Eulerligninger - er algebraiske ligninger af højst tredje grad i de ubekendte g .

$$\int_A d^2ij [L_i^1 L_j^{1T} + (L_i^{1T} g) L_j^2 + \frac{1}{2} (L_i^1 g^T L_j^2 + (g^T L_i^2 g) L_j^2)] dA g$$

$$- \int_{A_T} \bar{p}^T N dA = 0 \quad (3.4.1)$$

Den potentielle energi kan udtrykkes ved hjælp af de i ligevægtsligningerne optrædende størrelser, da der umiddelbart kan op-

stilles følgende identiteter

$$(\underline{L}_i^{1T} \underline{q}) (\underline{q}^T \underline{L}_j^2 \underline{q}) = \frac{2}{3} \underline{q}^T [(\underline{L}_i^{1T} \underline{q}) \underline{L}_j^2 + \frac{1}{2} \underline{L}_i^1 \underline{q}^T \underline{L}_j^2] \underline{q} \quad (3.4.2)$$

og

$$(\underline{q}^T \underline{L}_i^2 \underline{q}) (\underline{q}^T \underline{L}_j^2 \underline{q}) = \underline{q}^T [(\underline{q}^T \underline{L}_i^2 \underline{q}) \underline{L}_j^2] \underline{q} . \quad (3.4.3)$$

3.5 Incrementale ligevægtsligninger.

Det forhold, at elementmetodeligningerne (3.4.1) er ikke-lineære, bevirker, at det ikke på forhånd er givet, at en opnået løsning er den for det fysiske problem aktuelle.

Under en deformation, der sker så langsomt, at dynamiske effekter kan lades ude af betragtning, må ligevægtsligningerne (3.4.1) stedse være opfyldt. Det bevirker, at der gælder følgende sammenhæng mellem tilvækster i belastning og flytninger

$$\begin{aligned} & \int_A d^{ij} [(\underline{L}_i^{1T} \underline{q}) \underline{L}_j^2 + \underline{L}_j^2 \underline{q} \underline{L}_i^{1T} + \underline{L}_i^1 \underline{q}^T \underline{L}_j^2 \\ & + \frac{1}{2} (\underline{q}^T \underline{L}_j^2 \underline{q}) \underline{L}_i^2 + \underline{L}_i^2 \underline{q} \underline{q}^T \underline{L}_j^2] dA \underline{q} \\ & - \int_{A_T} \underline{\underline{p}}^T \underline{N} dA = 0 . \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

En prik over en størrelse angiver differentiation med hensyn til en styrende monotont varierende parameter, der ofte er en belastningsparameter. Det ses, at (3.5.1) er et sæt af lineære differentiaalligninger af første orden. Disse kan i forbindelse med en betingelseligning benyttes til bestemmelse af $\bar{\underline{p}}$ og \underline{q} som funktion af den styrende parameter, når udgangssituationen er kendt. Koefficientmatricen i (3.5.1) består af bestanddele, der ikke direkte optræder i udtrykkene for den potentielle energi

(3.3.2) og ligevægtsligningerne (3.4.1). Det er imidlertid muligt at opbygge disse udtryk ved hjælp af de i (3.5.1) forekommende udtryk, da de følgende identiteter eksisterer

$$(\underline{g}^T \underline{L}_j \underline{g}) \underline{L}_i^2 \underline{g} = \frac{1}{3} [2 \underline{L}_i^2 \underline{g} \underline{g}^T \underline{L}_j^2 + (\underline{g}^T \underline{L}_j \underline{g}) \underline{L}_i^2] \underline{g} \quad (3.5.2)$$

$$(\underline{L}_i^{1T} \underline{g}) \underline{L}_j^2 \underline{g} + \frac{1}{2} \underline{L}_i^1 (\underline{g}^T \underline{L}_j \underline{g}) = \frac{1}{2} [\underline{L}_i^1 \underline{g} \underline{L}_j^2 + (\underline{L}_i^{1T} \underline{g}) \underline{L}_j^2 + \underline{L}_j^2 \underline{g} \underline{L}_i^{1T}] \underline{g} . \quad (3.5.3)$$

I en konkret beregningssituation vil differentiaalligningerne (3.5.1) ofte erstattes af differensligninger, idet \underline{g} og $\underline{\bar{p}}$ erstattes med differenser $\Delta \underline{g}$ og $\Delta \underline{\bar{p}}$ svarende til en endelig ændring i den styrende parameter. Ved at indføre denne forenkling kan man ikke længere garantere, at løsningen er den søgte, men erfaringen viser imidlertid, at vælges trinene tilstrækkeligt små, vil forenklingen ingen negative følger have.

3.6 Samlet formelsæt.

3.6.1 Definitioner.

I den videre fremstilling benyttes følgende matricer

$$\underline{K}_0 = \int_A {}^{ij} \underline{L}_i^1 \underline{L}_j^{1T} dA \quad (3.6.1.1)$$

$$\underline{N}_1 = \int_A {}^{ij} [\underline{L}_i^1 \underline{g} \underline{L}_j^{1T} + \underline{L}_j^2 \underline{g} \underline{L}_i^{1T} + (\underline{g}^T \underline{L}_i^1) \underline{L}_j^2] dA \quad (3.6.1.2)$$

$$\underline{N}_1^* = \int_A {}^{ij} [(\underline{L}_i^{1T} \underline{g}) \underline{L}_j^2 + \frac{1}{2} \underline{L}_i^1 \underline{g} \underline{L}_j^{1T}] dA \quad (3.6.1.3)$$

$$\underline{N}_2 = \int_A {}^{ij} [\underline{L}_i^2 \underline{g} \underline{g}^T \underline{L}_j^2 + \frac{1}{2} (\underline{g}^T \underline{L}_i^2 \underline{g}) \underline{L}_j^2] dA \quad (3.6.1.4)$$

$$\mathbb{N}_2^* = \int_A d^{ij} [\frac{1}{2} (g_{ij}^T L_{ij}^2 L_j^2)] dA \quad (3.6.1.5)$$

$$\mathbb{R} = \int_{A_T} \mathbb{N}^T \bar{\mathbb{P}} dA \quad (3.6.1.6)$$

De størrelser, der indgår i udtrykkene, er defineret i (3.2.1,2) og (3.3.1). Den benyttede opdeling er angivet i [2].

3.6.2 Beskrivelse med brug af globale størrelser.

I dette afsnit indføres definitioner fra afsnit 3.6.1 i en række udtryk fra afsnittene 3.3 til 3.5. Det ses således, at den potentielle energi (3.3.2) kan udtrykkes ved

$$\pi_p = g^T (\frac{1}{2} K_0 + \frac{1}{3} N_1^* + \frac{1}{4} N_2^*) g - R^T g . \quad (3.6.2.1)$$

Udnyttede identiteterne (3.5.2,3) kan (3.6.2.1) omformes til

$$\pi_p = g^T (\frac{1}{2} K_0 + \frac{1}{6} N_1 + \frac{1}{12} N_2) g - g^T R . \quad (3.6.2.2)$$

Ved benyttelse af (3.6.1.1,3,5,6) bliver udtrykket (3.4.1) for ligevægtsligningerne ændret til

$$(K_0 + N_1^* + N_2^*) g - R = 0 , \quad (3.6.2.3)$$

der ved hjælp af (3.5.2,3) kan skrives som

$$(K_0 + \frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{3} N_2) g - R = 0 . \quad (3.6.2.4)$$

De incrementale ligevægtsligninger (3.5.1) får formen

$$(K_0 + N_1 + N_2) \dot{g} - \dot{R} = 0 . \quad (3.6.2.5)$$

Det ses af definitionerne, at matricerne K_0 , N_1 og N_2 er symmetriske. Dette forhold kan være medvirkende til at forenkle numeriske beregninger. Som det er diskuteret i [3], er de her

anvendte definitioner for \underline{N}_1 og \underline{N}_2 ikke de eneste, for hvilke ligevægtsligningerne og de incrementale ligevægtsligninger udtrykkes ved hjælp af de samme matricer. Ingen af de mulige udtryk har umiddelbare fordele. Eksisterende EDB-programmer fx. til lineær stabilitetsberegning kan imidlertid bevirke at et enkelt valg af \underline{N}_1 og \underline{N}_2 kan være mest hensigtsmæssigt.

3.6.3 Opbygning af systemmatricer af elementbidrag.

Ved udførelsen af integrationen i udtrykkene (3.6.1,2,4,6) er det bekvemt at udtrykke integralet som en sum af bidrag stammende fra de enkelte elementer. I dette afsnit omformes de anførte udtryk på denne måde, idet der benyttes udtryk hentet fra afsnit 3.2.

Ved at kombinere udtrykkene (3.2.4-8) kan følgende udtryk for tøjningerne tilvejebringes

$$\epsilon_i = (\underline{L}_{id}^T \underline{N}_d \underline{D}_e) \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{q}^T (\underline{D}_e^T \underline{F}_e^T \underline{N}_d^* \underline{L}_{id}^T \underline{N}_d \underline{F}_e \underline{D}_e) \underline{q} \quad (3.6.3.1)$$

Ved at sammenligne (3.6.3.1) med (3.2.2) kan der angives følgende udtryk

$$\underline{L}_i^1 = \underline{D}_e^T \underline{N}_d^T \underline{L}_{id}^1 \quad (3.6.3.2)$$

$$\underline{L}_i^2 = \underline{D}_e^T \underline{F}_e^T \underline{N}_d^* \underline{L}_{id}^2 \underline{N}_d \underline{F}_e \underline{D}_e \quad (3.6.3.3)$$

der ved indsættelse i (3.6.1,2,4,6) giver den ønskede opdeling. Arealet af element nummer el betegnes med A_{el} .

$$\begin{aligned} K_0 &= \sum_{el} \underline{D}_e^T \left[\int_{A_{el}} D^{ij} (\underline{N}_d^T \underline{L}_{di}^1 \underline{L}_{dj}^T \underline{N}_d) dA \right] \underline{D}_e \\ &= \sum_{el} \underline{D}_e^T K_0^{el} \underline{D}_e \end{aligned} \quad (3.6.3.4)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1 &= \sum_{el} \tilde{D}_e^T \int_{A_{el}} D^{ij} (\tilde{N}_d^T \tilde{L}_{di}^1 \tilde{d}^{*T} \tilde{L}_{dj}^2 \tilde{N}_d^*) dA \tilde{F}_e \\
&+ \tilde{F}_e^T \int_{A_{el}} D^{ij} (\tilde{L}_{di}^{1T} \tilde{d}) \tilde{N}_d^{*T} \tilde{L}_{dj}^2 \tilde{N}_d^* dA \tilde{F}_e \\
&+ \tilde{F}_e^T \int_{A_{el}} D^{ij} (\tilde{N}_d^{*T} \tilde{L}_{di}^2 \tilde{d}^* \tilde{L}_{dj}^{1T} \tilde{N}_d) dA \tilde{D}_e \\
&= \sum_{el} \tilde{D}_e^T \tilde{N}_1^{el} \tilde{D}_e
\end{aligned} \tag{3.6.3.5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_2 &= \sum_{el} \tilde{D}_e^T \tilde{F}_e^T \int_{A_{el}} D^{ij} (\tilde{N}_d^{*T} (\tilde{L}_{di}^2 \tilde{d}^* \tilde{d}^{*T} \tilde{L}_{dj}^2 \\
&+ \frac{1}{2} (\tilde{d}^{*T} \tilde{L}_{di}^2 \tilde{d}^*) \tilde{L}_{dj}^2) \tilde{N}_d^*) dA \tilde{F}_e \tilde{D}_e \\
&= \sum_{el} \tilde{D}_e^T \tilde{N}_2^{el} \tilde{D}_e
\end{aligned} \tag{3.6.3.6}$$

$$\tilde{R} = \sum_{el} \tilde{D}_e^T \int_{A_{Tel}} \tilde{N}_e^T \tilde{p} dA = \sum_{el} \tilde{D}_e^T \tilde{R}^{el} \tag{3.6.3.7}$$

I det sidste udtryk betegner A_{Tel} den del af udstrækningen af element nr. el , hvor belastningen er givet.

Ofte er det ikke muligt at foretage de nødvendige integrationer eksakt. I disse tilfælde må numerisk integration benyttes. Under alle omstændigheder er det afgørende, at de udtryk, der skal integreres bliver så enkle og kortfattede som muligt. Dette hensyn har bevirket, at det fortrinsvis er matricer knyttet til tilstandsvektorerne \tilde{d} og \tilde{d}^* , der er benyttet i (3.6.3.4-6).

3.7 Bestemmelse af "eksakte" knudekræfter.

De forenklinger, der indføres i afsnit 2.3, har til formål at gøre opstillingen af sekant- og tangentstivhedsmatricen gennemførelig.

Forenklinger, der ikke er knyttet direkte til de konstitutive ligninger eller flytningsinterpolationen, kan have konsekvenser, der ikke umiddelbart kan forudses. Det er derfor ønskeligt, at alene flytningstilnærmelsen og materialemodellen har indflydelse på løsningen til et givet problem.

En metode til at bestemme en tilnærmelse til en løsning ved iteration kan bestå i, at knudekræfterne bestemmes eksakt som vist nedenfor, hvorefter forbedringer til flytningerne bestemmes ved hjælp af den tangentstivhedsmatrix, der kan opstilles på basis af den tilnærmede teori.

Den potentielle energi har formen

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_A [\underline{\varepsilon}^T \underline{C} \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T \underline{D} \underline{\kappa}] dA - \int_{A_T} \underline{\bar{p}} \cdot \underline{u} dA \quad (3.7.1)$$

og ligevægtsligningerne

$$\delta \pi_p = \int_A [\underline{\varepsilon}^T \underline{C} \delta \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T \underline{D} \delta \underline{\kappa}] dA - \int_{A_T} \underline{\bar{p}} \cdot \delta \underline{u} dA = 0. \quad (3.7.2)$$

Flytningerne interpoleres ved

$$\underline{u} = \underline{u}^I q_I, \quad (3.7.3)$$

hvorved ligevægtsligningerne får formen

$$\delta \pi_p = [Q^I - R^I] \delta q_I = 0 \quad (3.7.4)$$

med

$$Q^I = \int_A [\underline{\varepsilon}^T \underline{C} \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial q_I} + \underline{\kappa}^T \underline{D} \frac{\partial \underline{\kappa}}{\partial q_I}] dA \quad (3.7.5)$$

$$R^I = \int_{A_T} \underline{\bar{p}} \cdot \underline{u}^I dA \quad (3.7.6)$$

For at bestemme Q^I må de afledede af tøjningsmålene med hensyn til

q_I bestemmes. De eksakte tøjningsdefinitioner (2.3.7 + 8) er

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\underline{A}_{\alpha} \cdot \underline{A}_{\beta} - \underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta}) \quad (3.7.7)$$

$$K_{\alpha\beta} = -\underline{N} \cdot \underline{R}_{,\alpha\beta} + \underline{n} \cdot \underline{r}_{,\alpha\beta} \quad (3.7.8)$$

idet notationen fra afsnit 2 er benyttet.

De afledede af tøjningsmålene med hensyn til q_I er

$$\frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial q_I} = \frac{1}{2}\{\underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta}^I + \underline{a}_{\beta} \cdot \underline{u}_{,\alpha}^I + \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta}^I + \underline{u}_{,\beta} \cdot \underline{u}_{,\alpha}^I\} , \quad (3.7.9)$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial q_I} = -\frac{\partial \underline{N}}{\partial q_I} \cdot \underline{R}_{,\alpha\beta} - \underline{N} \cdot \frac{\partial \underline{R}_{,\alpha\beta}}{\partial q_I} = -\frac{\partial \underline{N}}{\partial q_I} \cdot \underline{R}_{,\alpha\beta} - \underline{N} \cdot \underline{u}_{,\alpha\beta}^I . \quad (3.7.10)$$

For at bestemme størrelsen $\frac{\partial \underline{N}}{\partial q_I}$ er det bekvemt at benytte relationerne

$$\underline{N} \cdot \underline{N} = 1 \quad (3.7.11)$$

$$\underline{N} \cdot \underline{A}_{\alpha} = 0 , \quad (3.7.12)$$

der differentieres med hensyn til q_I . Herved bestemmes

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial q_I} = -[A^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial \underline{A}_{\alpha}}{\partial q_I} \cdot \underline{N} \right)] \underline{A}_{\delta} = -A^{\alpha\delta} (\underline{u}_{,\alpha}^I \cdot \underline{N}) \underline{A}_{\delta} . \quad (3.7.13)$$

Indsættes (3.7.13) i (3.7.10) bestemmes et udtryk for $\partial K_{\alpha\beta} / \partial q_I$, der lader sig udregne i diverse integrationspunkter, når flytnings-tilstanden er kendt.

REFERENCER:

- [1] : Fitch, J.R.: The Buckling and Post-Buckling Behavior of Spherical Caps under Concentrated Load.
Int. J. Solids Structures, 1968, Vol 4, pp. 421 - 446.
- [2] : Sundaramoorthy Rajasekaran & D.W. Murray: Incremental Finite Element Matrices, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 99, No. ST 12, Proc.Paper 10226, Dec.1973, pp. 2423 - 2438.
- [3] : Felippa, C.A.: Incremental Finite Element Matrices.
Journal of the Structural Division, ASCE, vol 100, Dec. 1974, No. ST 12, pp. 2521 - 2523.

4. EN FINITE-ELEMENT MODEL TIL BEREKNING AF TYNDE SKALKONSTRUKTIONER

4.1 Indledning.

I dette afsnit præsenteres en konkret model baseret på den teori, der er udledt i afsnittene 2 og 3. De matricer, der skal benyttes til opbygning af et generelt kompatibelt skalelement, bliver udviklet.

4.2 Krav til og ønskede egenskaber for elementmodellen.

Når bestemmelsen af ligevægtstilstande foretages ved anvendelse af et variationsprincip, er det en afgørende forudsætning, at de felter, der benyttes i modellen, opfylder variationsprincipets sidebetingelser. Eulerligningerne til det her benyttede variationsprincip - Stationær Potentiel Energi - er (3.4.1). De aktuelle krav til flytningstilnærmelsen er

- a) De foreskrevne randflytninger skal kunne gengives.
- b) Flytningen i skallens tangentplan (u_α) er en gang differentiabel i elementernes indre og kontinuert over elementrande.
- c) Flytninger i normalvektorens retning (w) er to gange differentiabel i elementernes indre. Endvidere er w , w_α og w_β kontinuerte over elementrande.

Når man står overfor at skulle beskrive flytningerne er der to nogenlunde nærliggende muligheder for dette. Flytningsvektoren kan angives ved sine koordinater udtrykt i enten det lokale koordinatsystem eller i det globale kartesiske referencesystem. Det er ved begge fremgangsmåder muligt at opfylde de anførte fundamentale krav a), b) og c). Valget mellem de to fremgangsmåder må betinges af andre forhold. Disse peger imidlertid ikke udelukkende i en retning, så valget må være en afvejning af disse hensyn.

For at benytte flytningerne angivet i det lokale koordinatsystem kan anføres

Teorien fra afsnit 2 kan umiddelbart anvendes.

Resultaterne vil være nemme at fortolke.

Det er muligt, at vælge forskellige formfunktioner for u_α og w .

Begrundelsen for at benytte flytninger udtrykt i referencesystemet er, at det herved er enkelt at sikre at infinitesimale stiftlegemebevægelser ikke giver bidrag til tøjningsenergien. Der er imidlertid den gene forbundet med fremgangsmåden, at det ikke er muligt at konstruere generelle skalelementer, da skalgeometrien indgår i de formfunktioner, der beskriver stiftlegemeredrejningen om et punkt.

Da det element, der ønskes udviklet, skal benyttes til beregningen, hvor løsningens karakter ikke på forhånd er oplagt, er det ønskeligt, at de valgte formfunktioner kan beskrive et så vidt spektrum af flytningstilstande, at en uheldig elementinddeling ikke forstyrrer løsningen for meget. Dette peger på et element med temmelig mange parametre.

Der er i [1] angivet en række fejlvurderinger, der kan benyttes når formfunktionerne vælges som polynomier i fladekoordinaterne. Det fremgår heraf, at flytningskomposanten w bør vælges som et polynomium, hvis grad er en højere end det, der beskriver u_α .

De anførte betragtninger har bevirket, at der er valgt en elementmodel, der er karakteriseret ved

- a) Flytningerne angives i det lokale koordinatsystem.
- b) Formfunktionen for u_α vælges som et fuldstændigt trediegrads polynomium.
- c) Formfunktionen for w vælges som et fjerde grads polynomium suppleret med nogle femtegrads led.
- d) Parameterområdet for elementet er en trekant i parameterplanen (Ω_2) .
- e) Der benyttes hjørneknuder og en midterknude. De benyttede knudeflytningsparametre er angivet på figuren. Antallet af frihedsgrader er 12 for hjørneknuder og 2 for midterknuden.

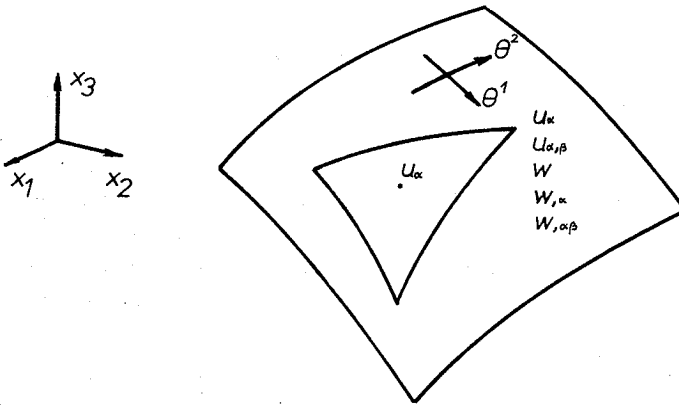


Fig. 4.2.1

Den lineære del af dette element er beskrevet i [2] og en del resultater er præsenteret i [3],[4],[5]. Det er i [6] anført, at betydelige fordele kan opnås ved at interpolere samtlige flytninger på den måde tværflytningen, w , bliver det her. I [7],[8] beskrives et andet forfinet skalelement, der imidlertid er baseret på en helt anden teori.

Da elementet skal kunne anvendes til at analysere skaller med en vilkårlig geometri, må de nødvendige integrationer foretages numerisk. For at kunne anvende resultater fra [9] må der til elementet tilknyttes et lokalt koordinatsystem med koordinaterne ξ og η . Forbindelsen mellem fladekoordinaterne θ^α og de lokale koordinater er lineær og vises på figuren

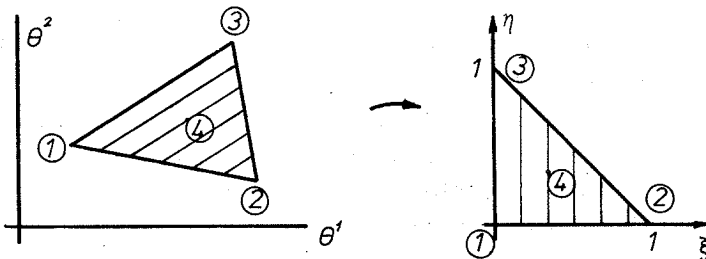


Fig. 4.2.2

Idet et suffix på θ^α angiver knudenummeret, kan sammenhængen angives analytisk ved

$$\begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\theta_2^1 - \theta_1^1) & (\theta_3^1 - \theta_1^1) \\ (\theta_2^2 - \theta_1^2) & (\theta_3^2 - \theta_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_1^2 \end{bmatrix} + \mathbb{F} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

eller

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbb{D} \left(\begin{bmatrix} \theta^1 & - & \theta_1^1 \\ \theta^2 & - & \theta_1^2 \end{bmatrix} \right) \quad (4.2.2)$$

Ved den numeriske integration er det nødvendigt at kende et udtryk for størrelsen af et arealelement på skalfladen udtrykt ved differentialer af de lokale koordinater.

$$\begin{aligned} dA &= |\underline{r}_\xi \times \underline{r}_\eta| d\xi d\eta \\ &= |(\underline{a}_1 f_{11} + \underline{a}_2 f_{21}) \times (\underline{a}_1 f_{12} + \underline{a}_2 f_{22})| d\xi d\eta \\ &= |f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}| |\underline{a}_1 \times \underline{a}_2| d\xi d\eta \\ &= |f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}| |a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}| d\xi d\eta \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

Det ses, at afbildningens Jacobideterminant er produktet af determinanten af \mathbb{F} fra (4.2.2) og determinanten af den metriske tensor $a_{\alpha\beta}$.

4.3 Interpolation af flytningskomponenter beliggende i skallens tangentflade.

Som angivet i afsnit 4.2 interpoleres u_α med et fuldstændigt trediegrads polynomium. Det må bemærkes, at tensorkomponenten u_α angives som funktion af de lokale koordinater, dvs.

$$u = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^{3-j} a_{S(i,j)} \xi^i \eta^j \quad (4.3.1)$$

$$S(i,j) = 1 + j + \sum_{k=0}^{i+j} k \quad (4.3.2)$$

idet u betegner enten u_1 eller u_2 .

Det ses, at u langs en elementrand varierer som et trediegrads polynomium, der netop er bestemt, hvis u samt den afledede langs randen er kendt. Dette forhold bevirker, at anvendelsen af et sæt parametre indeholdende flytninger samt de første afledede i koordinatretningerne vil føre til enkle udtryk for betingelser for kompatibilitet mellem elementer.

Som den tiende parameter vælges flytningen af midterknuden.

Flytningsinterpolationen (4.3.1,2) kan udtrykkes ved

$$u = N_u^T \tilde{A}_u, \quad (4.3.3)$$

hvor N_u afhænger af de lokale koordinater, og \tilde{A}_u indeholder parametrene i (4.3.1). Sammenhængen mellem \tilde{A}_u og knudeflytningsparametrene hørende til flytningen u samlet i vektoren \tilde{W}_u kan udtrykkes ved

$$\tilde{A}_u = T_u R_u \tilde{W}_u, \quad (4.3.4)$$

hvor T_u er en elementuafhængig kvadratisk matrix og R_u er en kvadratisk matrix, der dannes ud fra \tilde{F} . Matricerne er eksplicit angivet i appendix A-4.1.

Det ses af tøjningsdefinitionen (2.3.30), at bidraget fra flytningen u kan angives når tilstandsvektoren

$$\tilde{d}_u^T = [u \ u_{,\theta^1} \ u_{,\theta^2}] \quad (4.3.5)$$

er kendt.

Ud fra (4.3.1,2) fremkommer udtrykkene

$$u_{,\xi} = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=1}^{3-j} a_{S(i,j)} i \xi^{i-1} \eta^j \quad (4.3.6)$$

$$u_{,\eta} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=0}^{3-j} a_{S(i,j)} j \xi_{\eta}^{i,j-1}, \quad (4.3.7)$$

der giver \underline{d}_u , når $\underline{D}(=\underline{F}^{-1})$ kendes, idet

$$\underline{d}_u = \begin{bmatrix} u \\ u_{,\theta^1} \\ u_{,\theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{21} \\ 0 & d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \underline{R}_{du} \underline{d}'_u. \quad (4.3.8)$$

Udfra (4.3.6,7) kan tilstandsinterpolationsmatricen \underline{N}_{dAu} umiddelbart opstilles således at \underline{d}'_u og \underline{A}_u forbindes ved

$$\underline{d}'_u = \underline{N}_{dAu} \underline{A}_u. \quad (4.3.9)$$

Der er nu etableret matricer, der beskriver, hvorledes tilstandsvektoren \underline{d}_u interpoleres. Det samlede udtryk er

$$\underline{d}_u = (\underline{R}_{du} \underline{N}_{dAu} \underline{T}_u \underline{R}_u) \underline{W}_u. \quad (4.3.10)$$

4.4 Interpolation af flytningskomponenten i retning af skalfladens normalvektor.

Der benyttes et femtegradspolynomium til at interpolere tværflytningen, dvs.

$$w = \sum_{j=0}^5 \sum_{i=0}^{5-j} a_{S(i,j)} \xi_{\eta}^{i,j}, \quad (4.4.1)$$

hvor nummeret $S(i,j)$ er givet i (4.3.2). Interpolationspolynomiet har 21 koefficienter, mens der på figur 4.2.1 er angivet 18 knudeflytningsparametre. Tre af polynomiekoefficienterne er således ikke uafhængige. Polynomiet indrettes således, at den afledede af w på tværs af en elementrand højst varierer som et trediegradspolynomium. Begrundelsen for ikke at indføre tre ekstra knudeflytninger, fx. hældninger midtpå elementrandene og således interpolere w med et fuldstændigt femtegradspoly-

nomium er, at tilstandsvektoren

$$\underline{d}_w^T = [w, w_{\theta^1}, w_{\theta^2}, w_{\theta^1\theta^1}, w_{\theta^1\theta^2}, w_{\theta^2\theta^2}] \quad (4.4.2)$$

med det beskårne polynomium, der er fuldstændigt i fjerde grad interpolerer tøjningsmålet $K_{\alpha\beta}$ med samme grad af fuldstændighed som $E_{\alpha\beta}$. Fejlvurderingen i [1] angiver, at konvergenshastigheden bestemmes af det dårligst approximerede tøjningsmål. Der er endvidere problemer af topologisk art forbundet med anvendelsen af drejningsovertallige i sideknuder.

I lighed med udtrykkene (4.3.6,7) kan der anføres følgende udtryk for de afledede af w med hensyn til de lokale koordinater.

$$w_{,\xi} = \sum_{j=0}^5 \sum_{i=1}^{5-j} a_{S(i,j)} i \xi^{i-1} \eta^j \quad (4.4.3)$$

$$w_{,\eta} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=0}^{5-j} a_{S(i,j)} j \xi^i \eta^{j-1} \quad (4.4.4)$$

$$w_{,\xi\xi} = \sum_{j=0}^5 \sum_{i=2}^{5-j} a_{S(i,j)} i(i-1) \xi^{i-2} \eta^j \quad (4.4.5)$$

$$w_{,\xi\eta} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^{5-j} a_{S(i,j)} i \cdot j \xi^{i-1} \eta^{j-1} \quad (4.4.6)$$

$$w_{,\eta\eta} = \sum_{j=2}^5 \sum_{i=0}^{5-j} a_{S(i,j)} j(j-1) \xi^i \eta^{j-2} \quad (4.4.7)$$

Tilstandsvektoren udtrykkes ved

$$\underline{d}_w = \begin{bmatrix} w \\ w_{,\theta^1} \\ w_{,\theta^2} \\ w_{,\theta^1\theta^1} \\ w_{,\theta^1\theta^2} \\ w_{,\theta^2\theta^2} \end{bmatrix} = \underline{R}_{dw} \underline{d}_w' = \underline{R}_{dw} \begin{bmatrix} w \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\xi\xi} \\ w_{,\xi\eta} \\ w_{,\eta\eta} \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

Matricen \tilde{R}_{dw} er udskrevet i appendix A-4.2. Den dannes af elementerne i \tilde{D} (se(4.2.2)) og afhænger således af koordinaterne til hjørnekuderne.

Udtrykkene (4.4.1,3-7) kan opskrives på matrixform som

$$\tilde{d}'_w = \tilde{N}_{dAw} \tilde{A}_w . \quad (4.4.9)$$

Tilbage står at udtrykke koefficienterne \tilde{A}_w i interpolationspolynomiet ved hjælp af knudeflytningsvektoren

$$\tilde{W}_w^T = [(\tilde{d}_w^1)^T \ (\tilde{d}_w^2)^T \ (\tilde{d}_w^3)^T] , \quad (4.4.10)$$

hvor \tilde{d}_w^j angiver \tilde{d}_w i knude j .

Forudsætningen om, at den afledede af w på tværs af elementrande varierer som et tredjegradspolynomium, giver tre relationer mellem elementerne i \tilde{A}_w . Det er i appendix A-4.2 angivet, hvorledes a_{17} , a_{20} og a_{18} eller a_{19} kan udtrykkes ved de øvrige koefficienter i interpolationspolynomiet. Der er endvidere vist, hvorledes der kan etableres en sammenhæng mellem \tilde{A}_w og vektoren

$$\tilde{W}'_w^T = [(\tilde{d}'_w^1)^T \ (\tilde{d}'_w^2)^T \ (\tilde{d}'_w^3)^T] , \quad (4.4.11)$$

hvis bestanddele er angivet i (4.4.8). Ved at invertere udtrykket (4.4.8) kan den søgte forbindelse mellem \tilde{A}_w og \tilde{W}_w etableres og udtrykkes ved

$$\tilde{A}_w = \tilde{T}_w \tilde{R}_w \tilde{W}_w . \quad (4.4.12)$$

Det er nu muligt, at interpolere tilstandsvektoren med knudeflytningerne (\tilde{W}_w) som frie parametre gennem

$$\tilde{d}_w = \tilde{R}_{dw} \tilde{N}_{dAw} \tilde{T}_w \tilde{R}_w \tilde{W}_w . \quad (4.4.13)$$

4.5 Interpolation af tøjningsmålene.

I afsnit 3.2 blev tilstandsvektorerne indført således at tøjningsdefinitionen fik formen

$$\epsilon_i = \underline{L}_{id}^{1T} \underline{d} + \frac{1}{2} \underline{d}^{*T} \underline{L}_{id}^2 \underline{d}^* \quad (3.2.8) , \quad (4.5.1)$$

idet tøjningsmålene $E_{\alpha\beta}$ og $K_{\alpha\beta}$ samledes i en vektor ϵ_i . I dette kapitel opstilles matricerne \underline{L}_{id}^1 og \underline{L}_{id}^2 for de forenkledede tøjningsmål, der er angivet i afsnit 2.3. Disse får følgende udseende, når den kovariante differentiation "oversættes" ved hjælp af partiel differentiation og Christoffelsymboler

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha}||_{\beta} + u_{\beta}||_{\alpha} + 2b_{\alpha\beta}w + w||_{\alpha}w||_{\beta}) \\ &= -u_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta}w \\ &\quad + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} \end{aligned} \quad (2.3.30) \quad (4.5.2)$$

$$K_{\alpha\beta} = w||_{\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} w_{,\gamma} \quad (2.3.31). \quad (4.5.3)$$

Der er her benyttet, at Christoffelsymbolet af anden art, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, er symmetrisk i α og β . For at forenkle indiceringen indføres betegnelserne $u_1 = u, u_2 = v$.

Det ses af (4.5.2,3), at \underline{d} og \underline{d}^* kan have formen

$$\underline{d}^T = [(\underline{d}_u)^T \ (\underline{d}_v)^T \ (\underline{d}_w)^T] \quad (4.5.4)$$

$$\underline{d}^{*T} = [w_{,\alpha} \ w_{,\beta}] , \quad (4.5.5)$$

hvor \underline{d}_u og \underline{d}_v er tilstandsvektorer for flytningerne u og v (se(4.3.8)), og \underline{d}_w er givet ved (4.4.2).

Tøjningsmålene arrangeres i $\underline{\epsilon}$ på følgende måde

$$\underline{\epsilon}^T = [E_{11} \ E_{12} \ E_{22} \ K_{11} \ K_{12} \ K_{22}] , \quad (4.5.6)$$

idet symmetrien i tøjningsmålene er udnyttet.

Vektorerne \underline{L}_{di}^1 kan arrangeres i en tøjnings-tilstands-matrix, \underline{B}_d , således at den lineære del af (4.5.1) kan opskrives på formen

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}^L &= \underline{B}_d \underline{d} \\ &= \underline{B}_{du} \underline{d}_u + \underline{B}_{dv} \underline{d}_v + \underline{B}_{dw} \underline{d}_w.\end{aligned}\quad (4.5.7)$$

I appendix A-4.3 findes matricerne \underline{B}_{du} , \underline{B}_{dv} og \underline{B}_{dw} udskrevet dels for den her anvendte teori (4.5.2,3) og dels for den konsistente lineære teori, der blev omtalt i afsnit 2.5 [10].

Matricerne \underline{L}_{di}^2 skal opstilles, således at den ikke-lineære del af (4.5.1) får formen

$$\underline{\varepsilon}_i^{NL} = \frac{1}{2} \underline{d}^{*T} \underline{L}_{di}^2 \underline{d}^*.\quad (4.5.8)$$

Højresiden i (4.5.8) er et kongruent produkt. Det er derfor alene den symmetriske del af \underline{L}_{di}^2 , der har indflydelse på tøjningerne $\underline{\varepsilon}_i$. I det følgende bestemmes de symmetriske dele af \underline{L}_{di}^2 .

Tøjnings-flytningsrelationerne (4.5.2,3) viser, at alene matricer med index 1,2,3 behøver indeholde fra nul forskellige led. Det typiske tøjningsled har udseendet

$$w_{,\alpha} w_{,\beta} = \underline{d}^{*T} \left[\begin{array}{cc} \delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^1 & \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^2 + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^1) \\ \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^2 + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^1) & \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^2 \end{array} \right] \underline{d}^*,\quad (4.5.9)$$

hvor δ_{α}^{β} er Kronecker's delta (se afsnit 2.1).

Da matricerne \underline{L}_{id}^1 og \underline{L}_{id}^2 nu er identificeret, kan tøjningsmålene interpoleres, idet resultater fra afsnit 4.3 og 4.4 benyttes. Således får den lineære tøjningsfordelingsmatrix, \underline{B} , udseendet

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}^L &= \tilde{B} \tilde{W}_e \\
&= \tilde{B}_{du} \tilde{R}_{du} \tilde{N}_{dAu} \tilde{T}_u \tilde{R}_u \tilde{W}_u \\
&\quad + \tilde{B}_{dv} \tilde{R}_{dv} \tilde{N}_{dAv} \tilde{T}_v \tilde{R}_v \tilde{W}_v \\
&\quad + \tilde{B}_{dw} \tilde{R}_{dw} \tilde{N}_{dAw} \tilde{T}_w \tilde{R}_w \tilde{W}_w
\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Ved bestemmelse af $\tilde{\varepsilon}^{NL}$ er det ofte en fordel først at udregne \tilde{d}^* .

Benyttelsen af tøjnings-tilstands-matricerne \tilde{B}_{di} bevirker, at den anvendte teori og diskretisering af flytningerne er uafhængige.

REFERENCER:

- [1] : Strang, G. & Fix, G.J.: An Analysis of the Finite Element Method. 1973. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [2] : Cowper, G.R.: CURSHL: A High-Precision Finite Element for Shells of Arbitrary Shape.
National Research Council of Canada, National Aeronautical Establishment, Aeronautical Report LR-560, NCR No. 12624, Ottawa, 1971.
- [3] : Cowper, G.R., Kosko, E. & Lindberg, G.M.: Static and Dynamic Applications of a High-Precision Triangular Plate Bending Element.
AIAA-Journal, Vol 7, No. 9, Oct. 1969, pp. 1951-1965.
- [4] : Lindberg, G.M. & Olson, M.D.: A High-Precision Triangular Shell Finite Element.
AIAA-Journal, Vol. 9, No. 3, Mar. 1971, pp. 530-532.
- [5] : Cowper, G.R., Lindberg, G.M. & Olson, M.D.: A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape.
Int. J. of Solids Structures, 1970, Vol.6, pp. 1133-1156.
- [6] : Dawe, D.J.: High-Order Triangular Finite Element for Shell Analysis.
Int. J. of Solids Structures, 1975, Vol.11, pp. 1097-1110.
- [7] : Argyris, J.H. & Scharpf, D. W.: The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method.
The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol.72, No. 694, pp. 873-883, 1968.
- [8] : Argyris, J.H. & Scharpf, D.W.: The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method.
The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol.73, pp. 423-426, May 1969.

- [9] : Laursen, M.E. & Gellert, M.: Some Criteria for Numerically Integrated Matrices and Quadrature Formulas for Triangles. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, No.1, jan. 1978, pp. 67-76.
- [10]: Koiter, W.T.: A Consistent first Approximation Theory for Thin Shells.
Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells (I.U.T.A.M.), 1960, Amsterdam.

Appendix A - 4.1

Matricer knyttet til interpolation af u .

Opstilling af \underline{R}_{du} .

Matricen forbinder tilstandsvektorerne \underline{d}_u og \underline{d}'_u ved (4.3.8). Ved anvendelse af (4.4.2) og kædereglen kan man opstille

$$\begin{bmatrix} u \\ u, \alpha \\ u, \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{21} \\ 0 & d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u, \xi \\ u, \eta \end{bmatrix}. \quad (A-4.1.1)$$

Størrelserne d_{ij} er elementer i \underline{D} (4.2.2).

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{f}(\theta_3^2 - \theta_1^2) & d_{12} &= \frac{1}{f}(\theta_1^1 - \theta_3^1) \\ d_{21} &= \frac{1}{f}(\theta_2^2 - \theta_1^2) & d_{22} &= \frac{1}{f}(\theta_2^1 - \theta_1^1) \end{aligned} \quad (A-4.1.2)$$

idet θ_k^j er θ^j i knude nr. k , og f er determinanten af \underline{F} , dvs.

$$f = (\theta_2^1 - \theta_1^1)(\theta_3^2 - \theta_1^2) - (\theta_3^1 - \theta_1^1)(\theta_2^2 - \theta_1^2). \quad (A-4.1.3)$$

Opstilling af T_u .

Matricen forbinder elementerne i \underline{A}_u med vektoren \underline{W}_u , der er givet ved

$$\underline{W}_u'^T = [(\underline{d}_u'^1)^T (\underline{d}_u'^2)^T (\underline{d}_u'^3)^T u^4] \quad (A-4.1.4)$$

hvor et øvre index angiver knudenummeret. Ved hjælp af (4.3.1), (4.3.6) og (4.3.7) kan \underline{W}_u udtrykkes ved \underline{A}_u . Denne relation kan inverteres til

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & -3 & -7 & 2 & -1 & -7 & -1 & 2 & 27 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 3 & 2 & 7 & -2 & 2 & 7 & 1 & -2 & -27 \\ 13 & 2 & 3 & 7 & -2 & 1 & 7 & 2 & -2 & -27 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ w_{,\xi}^1 \\ w_{,\eta}^1 \\ w^2 \\ w_{,\xi}^2 \\ w_{,\eta}^2 \\ w^3 \\ w_{,\xi}^3 \\ w_{,\eta}^3 \\ w^4 \end{bmatrix} \quad (A-4.)$$

Opstilling af \tilde{R}_u .

Matricen forbinder \tilde{W}_u' og \tilde{W}_u . Den kan opstilles ved at inverttere (A-4.1.1) og får udseendet

$$\tilde{R}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{11} & f_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{12} & f_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11} & f_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{12} & f_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11} & f_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{12} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4.1.6})$$

med f_{ij} som elementer i \tilde{F} , dvs.

$$f_{11} = \theta_2^1 - \theta_1^1$$

$$f_{12} = \theta_3^1 - \theta_1^1$$

$$f_{21} = \theta_2^2 - \theta_1^2$$

$$f_{22} = \theta_3^2 - \theta_1^2, \quad (\text{A-4.1.7})$$

hvor et nedre index angiver knudennummer.

Appendix A - 4.2

Matricer knyttet til interpolation af w .

Opstilling af \tilde{R}_{wd} .

Matricen forbinder \tilde{d}_w og \tilde{d}_w' ved (4.4.8).

Ved anvendelse af kædereglene og (4.2.2) kan man opstille

$$\begin{bmatrix} w \\ w, \alpha \\ w, \beta \\ w, \alpha\alpha \\ w, \alpha\beta \\ w, \beta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{11}d_{11} & 2d_{11}d_{12} & d_{21}d_{21} \\ 0 & 0 & 0 & d_{11}d_{12} & (d_{11}d_{22} + d_{21}d_{12}) & d_{21}d_{22} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12}d_{12} & 2d_{12}d_{22} & d_{22}d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w, \xi \\ w, \eta \\ w, \xi\xi \\ w, \xi\eta \\ w, \eta\eta \end{bmatrix}$$

(A-4.2.1)

Størrelserne d_{ij} er angivet i begyndelsen af appendix A-4.1.

Opstilling af \tilde{T}_w .

Betingelser for at den afledede af w efter retningen vinkelret på elementrande angives nedenfor. For at simplificere indiceringen indføres betegnelserne $\theta^1 = \alpha$, $\theta^2 = \beta$.

En parameterfremstilling for forbindelseslinien mellem (α_i, β_i) og (α_j, β_j) er

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\alpha_j - \alpha_i) \\ (\beta_j - \beta_i) \end{bmatrix} \zeta, \quad \zeta \in [0, 1]$$

(A-4.2.2)

Et linieelement på linien er givet ved

$$\begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_j - \alpha_i) \\ (\beta_j - \beta_i) \end{bmatrix} d\zeta,$$

(A-4.2.3)

mens et linieelement i retningen vinkelret på linien er givet ved

$$\begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j - \beta_i \\ \alpha_i - \alpha_j \end{bmatrix} d\varphi \quad (\text{A-4.2.4})$$

idet φ er en koordinat i denne retning.

Den afledede w, φ kan ved gentagen anvendelse af kædereglene udtrykkes som

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varphi} \right) + \frac{\partial w}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varphi} \right) \\ &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \left[\frac{\beta_3 - \beta_1}{f} (\beta_j - \beta_i) + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{f} (\alpha_i - \alpha_j) \right] \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial \eta} \left[\frac{\beta_1 - \beta_2}{f} (\beta_j - \beta_i) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f} (\alpha_i - \alpha_j) \right] \quad (\text{A-4.2.5}) \end{aligned}$$

hvor (4.2.2) og (A-4.2.4) er benyttet, og f er determinanten af \underline{f} , dvs.

$$f = (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_1) - (\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \quad (\text{A-4.2.6})$$

Langs elementsiden mellem knude 1 og 2 er de lokale koordinater givet ved $(\xi, \eta) = (\zeta, 0), \zeta \in [0, 1]$. Indføres (4.4.3, 4) i (A-4.2.5) fremkommer

$$\begin{aligned} w, \varphi|_{1,2} &= \frac{1}{f} \left[\sum_{i=1}^5 a_{S(i,0)} \cdot i \zeta^{i-1} T(1,2,3) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^4 a_{S(i,1)} \zeta^i T(1,2,2) \right], \quad \zeta \in [0, 1] \quad (\text{A-4.2.7}) \end{aligned}$$

Hvor størrelsen $T(i, j, k)$ betegner den ved

$$T(i, j, k) = (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) + (\beta_i - \beta_j)(\beta_i - \beta_k) \quad (\text{A-4.2.8})$$

givne kombination af hjørneknudernes koordinater. Betingelsen

for at fjerdegradsleddet i (A-4.2.7) falder bort er

$$a_{16} \cdot 5 \cdot T(1,2,3) = a_{17} T(1,2,2). \quad (\text{A-4.2.9})$$

Langs elementranden mellem knude 1 og 3 er udtrykket for $w_{,\varphi}$ givet ved

$$\begin{aligned} w_{,\varphi}|_{1,3} = \frac{1}{F} \left[- \sum_{j=0}^4 a_{S(1,j)} \zeta^j T(1,3,3) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^5 a_{S(0,j)} j \zeta^{j-1} T(1,2,3) \right]; \zeta \in [0,1] \quad (\text{A-4.2.10}) \end{aligned}$$

Her er betingelsen for at fjerdegradsleddet i (A-4.2.10) falder bort

$$a_{20} T(1,3,3) = 5 a_{21} T(1,2,3). \quad (\text{A-4.2.11})$$

Langs elementranden mellem knude 2 og 3 er $w_{,\varphi}$ givet ved

$$\begin{aligned} w_{,\varphi}|_{2,3} = \frac{1}{F} \left[- \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{5-j} a_{S(i,j)} i \zeta^{i-1} (1-\zeta)^j T(3,1,2) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=0}^{5-j} a_{S(i,j)} j \zeta^i (1-\zeta)^{j-1} T(2,3,1) \right] \quad (\text{A-4.2.12}) \end{aligned}$$

Langs denne elementrand er betingelsen for at $w_{,\varphi}$ varierer som et tredjegradspolynomium

$$\begin{aligned} T(3,1,2) [5a_{16} - 4a_{17} + 3a_{18} - 2a_{19} + a_{20}] + \\ + T(2,3,1) [a_{17} - 2a_{18} + 3a_{19} - 4a_{20} + 5a_{21}] = 0 \quad (\text{A-4.2.13}) \end{aligned}$$

Det ses af definitionen for $T(i,j,k)$, at det er tilladeligt at indføre (A-4.2.9) og (A-4.2.11) i (A-4.2.13) på følgende måde

$$\begin{aligned}
& 5[T(3,2,2) + (T(2,3,1) - 4T(3,1,2))T(1,2,3)/T(1,2,2)]a_{16} + \\
& + [3T(3,1,2) - 2T(2,3,1)]a_{18} + [3T(2,3,1) - 2T(3,1,2)]a_{19} + \\
& + 5[T(2,3,1) + (T(3,1,2) - 4T(2,3,1))T(1,2,3)/T(1,3,3)]a_{21} = 0.
\end{aligned}$$

(A-4.2.14)

Det ses af (A-4.2.8), at $T(i,j,k)$ kan udtrykkes som et indre produkt af vektorer i Ω_2 , der forbinder elementets hjørner. I det nedenstående udtryk betegner \underline{V}_{ij} vektoren fra knude j til i . Omskrives (A-4.2.8) fremkommer

$$T(i,j,k) = \underline{V}_{ji} \cdot \underline{V}_{ki}. \quad (\text{A-4.2.15})$$

Koefficienterne til a_{18} og a_{19} i (A-4.2.14) udtrykkes så som

$$K_{18} = \underline{V}_{23} \cdot (3 \underline{V}_{13} + 2 \underline{V}_{12}) \quad (\text{A-4.2.16})$$

$$K_{19} = \underline{V}_{32} \cdot (2 \underline{V}_{13} + 3 \underline{V}_{12}) \quad (\text{A-4.2.17})$$

Det ses heraf, at K_{18} og K_{19} ikke samtidig kan være nul. Det er altså muligt at udtrykke a_{16} , a_{20} og a_{18} eller a_{19} ved hjælp af de øvrige a 'er. De u- og afhængige a 'er samles i henholdsvis \underline{A}_1 og \underline{A}_2 . Sammenhængen mellem \underline{W}'_w , \underline{A}_1 og \underline{A}_2 har formen

$$\underline{W}'_w = \underline{H}_1 \underline{A}_1 + \underline{H}_2 \underline{A}_2 \quad (\text{A-4.2.18})$$

$$\underline{A}_2 = \underline{H}_3 \underline{A}_1. \quad (\text{A-4.2.19})$$

Matricerne \underline{H}_1 og \underline{H}_2 er konstante, mens \underline{H}_3 afhænger af hjørneknudernes koordinater. De ovenstående relationer kan inverteres til

$$\underline{A}_1 = \underline{H}_1^{-1} (\underline{I} - \underline{H}_2 (\underline{I} + \underline{H}_3 \underline{H}_1^{-1} \underline{H}_2)^{-1} \underline{H}_3 \underline{H}_1^{-1}) \underline{W}_w \quad (\text{A-4.2.20})$$

$$\tilde{A}_2 = (\tilde{I} + \tilde{H}_3 \tilde{H}_1^{-1} \tilde{H}_2)^{-1} \tilde{H}_3 \tilde{H}_1^{-1} \tilde{W}_w \quad (\text{A-4.2.21})$$

Matricerne \tilde{H}_1 , \tilde{H}_1^{-1} og \tilde{H}_2 er udskrevet i slutningen af afsnittet. Udtrykkene ser noget komplicerede ud, men det er dog muligt at foretage en effektiv numerisk beregning. De to udtryk giver mulighed for opstilling af relationen

$$\tilde{A}_w = \tilde{T}_w \tilde{W}_w' \quad (\text{A-4.2.22})$$

Opstilling af \tilde{R}_w .

Matricen forbinder \tilde{W}_w og \tilde{W}_w' ved

$$\tilde{W}_w' = \tilde{R}_w \tilde{W}_w \quad (\text{A-4.2.23})$$

Det ses af (4.4.10) og (4.4.11), at \tilde{R}_w kan opstilles, hvis forbindelsen mellem \tilde{d}_w^i og $\tilde{d}_w'^i$ etableres. Denne kan opstilles ved at invertere (A-4.2.1) og får formen

$$\begin{bmatrix} w \\ w, \xi \\ w, \eta \\ w, \xi\xi \\ w, \xi\eta \\ w, \eta\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{11} & f_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{12} & f_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{11}f_{11} & 2f_{11}f_{21} & f_{21}f_{21} \\ 0 & 0 & 0 & f_{11}f_{12} & (f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}) & f_{21}f_{22} \\ 0 & 0 & 0 & f_{12}f_{12} & 2f_{12}f_{22} & f_{22}f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w, \alpha \\ w, \beta \\ w, \alpha\alpha \\ w, \alpha\beta \\ w, \beta\beta \end{bmatrix}$$

(A-4.2.24)

idet f_{ij} er elementer i \tilde{F} (4.2.1).

[illegible]

-1
H1 * H2

0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
-1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-1.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
2.0	0.0	0.0
0.0	1.0	1.0
0.0	0.0	2.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
1.0	-1.0	-1.0
0.0	0.0	0.0

A19 afhængig

-1
H1 * H2

0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
-1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-1.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
2.0	0.0	0.0
1.0	1.0	0.0
0.0	0.0	2.0
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0
-1.0	-1.0	1.0
0.0	0.0	0.0

A18 afhængig

Appendix A - 4.3Tøjnings-tilstandsmatricer.Matricer hørende til den forenklede teori fra afsnit 2.5.

$$\underline{B}_{du} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^1 & 1 & 0 \\ -\Gamma_{12}^1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\Gamma_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-4.3.1)$$

$$\underline{B}_{dv} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^2 & 0 & 0 \\ -\Gamma_{12}^2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\Gamma_{22}^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-4.3.2)$$

$$\underline{B}_{dw} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_{11}^1 & -\Gamma_{11}^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_{12}^1 & -\Gamma_{12}^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\Gamma_{22}^1 & -\Gamma_{22}^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A-4.3.3)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = a^{\gamma\delta} (x_{i,\alpha\beta} x_{i,\delta}) \quad (A-4.3.4)$$

$$b_{\alpha\beta} = n_i x_{i,\alpha\beta}, \quad (\text{A-4.3.5})$$

med x_i og n_i som henholdsvis stedvektor og enhedsnormalvektor i kartesiske koordinater. Et komma betegner partiel differentiation mht. en fladekoordinat θ^α .

Matricer hørende til den konsistente lineære teori ref [10].

Teorien adskiller sig fra den i afsnit 2.5 præsenterede ved at det ikke-lineære led i $E_{\alpha\beta}$ mangler, og at der er tilføjet et bidrag til $K_{\alpha\beta}$, der får udseendet

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mu_\alpha ||_\beta + \mu_\beta ||_\alpha - b_\beta^\lambda \omega_{\alpha\lambda} - b_\alpha^\lambda \omega_{\beta\lambda}), \quad (\text{A-4.3.6})$$

hvor de indgående størrelser er givet ved

$$\mu_\alpha = w_{,\alpha} - b_\alpha^Y u_Y \quad (\text{A-4.3.7})$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\beta ||_\alpha - u_\alpha ||_\beta) \quad (\text{A-4.3.8})$$

De to tensorer har den fysiske betydning, at μ_α angiver normalvektorens drejning om linier beliggende i tangentfladen, mens $\omega_{\alpha\beta}$ angiver rotationen om normalvektoren. Udskrives udtrykket (A-4.3.6) ses, det at \mathcal{B}_{wd} svarer til det foran anførte, mens \mathcal{B}_{du} og \mathcal{B}_{dv} får udseendet.

$$\mathcal{B}_{du} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^1 & 1 & 0 \\ -\Gamma_{12}^1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\Gamma_{22}^1 & 0 & 0 \\ -b_{1,1}^1 & +b_1^1 \Gamma_{11}^1 + b_2^1 \Gamma_{11}^2 & -b_1^1 & b_1^2/2 \\ -(b_{1,2}^1 + b_{1,2}^1)/2 + b_1^1 \Gamma_{12}^1 + b_2^1 \Gamma_{12}^2 & -b_2^1/2 & (-3b_1^1 + b_2^2)/4 \\ -b_{2,2}^1 & +b_1^1 \Gamma_{22}^1 + b_2^1 \Gamma_{22}^2 & 0 & -3b_1^2/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4.3.9})$$

$$\tilde{B}_{dv} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^2 & 0 & 0 \\ -\Gamma_{12}^2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\Gamma_{22}^2 & 0 & 1 \\ -b_{1,2}^2 & +b_1^2\Gamma_{11}^1 + b_2^2\Gamma_{11}^2 & -3b_1^2/2 & 0 \\ -(b_{1,2}^2 + b_{2,1}^2)/2 + b_1^2\Gamma_{12}^1 + b_2^2\Gamma_{12}^2 & (-3b_2^2 + b_1^1)/4 & -b_1^2/2 \\ -b_{2,2}^2 & +b_1^2\Gamma_{22}^1 + b_2^2\Gamma_{22}^2 & b_2^1/2 & -b_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4.3.10})$$

Christoffel symbolerne $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ kan bestemmes ved (A-4.3.4), og den blandede krumningstensor kan bestemmes ved hjælp af (A-4.3.5) og den kontravariante metriske tensor (2.1.9,12) som

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \quad (\text{A-4.3.11})$$

5. PERTURBATIONSANALYSE AF LIGEVÆGTSTILSTANDE.

5.1 Indledning.

I afsnit 3 angives et sæt lineære differentialligninger til bestemmelse af sammenhørende tilvækster af flytninger og belastning (fx (3.5.1) eller (3.6.2.5)).

I visse situationer har ligningssystemet ikke en entydigt bestemt løsning. Disse tilstande betegnes kritiske tilstande. Et velkendt eksempel herpå er en simpelt understøttet søjle med en axial belastning svarende til Euler-lasten. Her er ligevægtstilstanden labil, idet der kan forekomme flytninger, der ikke er ledsaget af belastningstilvækster.

Nedenfor angives metoder til bestemmelse af kritiske tilstande. Endvidere opstilles udtryk til bestemmelse af flytnings- og belastningsforløbet efter forgreningen.

5.2 Bestemmelse af kritisk tilstand.

De incrementale ligevægtsligninger for en elementopdelt konstruktion har udseendet

$$\tilde{K}_T \dot{\tilde{q}} = (\tilde{K}_0 + \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2) \dot{\tilde{q}} = \dot{\tilde{R}}. \quad (5.2.1)$$

Der knytter sig naturligt nok speciel interesse til de forgreningstilstande, der opstår, når den styrende parameter er belastningsparameteren. De kritiske tilstande er således karakteriseret ved, at der kan forekomme tilvækster i \tilde{q} på trods af, at belastningen er konstant. Denne konstatering medfører, at kritiske tilstande netop indtræffer, når tangentstivhedsmatricen, \tilde{K}_T , er singular.

Integreres (5.2.1) fra den kendte udgangstilstand, kan flytningerne bestemmes som funktion af belastningen ved

$$\tilde{q} = \tilde{\bar{q}}(\lambda), \quad (5.2.2)$$

hvor overstregningen angiver, at der er tale om en ikke-forgrenet tilstand. Ved at indsætte (5.2.2) i (5.2.1) kan tangentstivheds-

matricen inden forgreningen bestemmes. Imidlertid er det ikke almindeligvis gennemførligt at bestemme en kritisk værdi, λ_{cr} , af belastningsparameteren direkte. Det vil oftest være nødvendigt at anvende en iterativ numerisk fremgangsmåde. Der vil nedenfor blive diskuteret to forskellige metoder.

Den første metode er baseret på den kendsgerning, at determinanten for en singular matrix er nul. En række ligevægtstilstande svarende til voksende værdier af belastningsparameteren bestemmes. De tilhørende determinantværdier registreres, og herved fastlægges determinantens nulpunkter. Metoden har den fordel, at den er enkel, hvis det er enkelt at bestemme ligevægtstilstande. Den har imidlertid den ulempe, at der oftest må foretages omfattende numeriske regninger før den kritiske værdi er fastlagt. En anden gene er, at der inden beregningens begyndelse må træffes bestemmelse af det belastningsområde, i hvilket determinantforløbet bestemmes.

Det forhold, at der ofte er megen lille forskel på en lineær og en ikke-lineær analyse i området indtil forgreningen finder sted, danner baggrund for den anden metode. Det forudsættes her, at tøjningerne før forgreningen er proportionale med belastningsparameteren,

$$\bar{\epsilon}_i = \underline{L}_i^{1T} \bar{q} = \lambda \underline{L}_i^{1T} \underline{q}_0. \quad (5.2.3)$$

Denne antagelse medfører, at den kvadratiske del af tøjningsdefinitionen (3.2.2) negligeres.

Variationen af tøjningerne bestemt ved (3.2.2) bliver

$$\delta \epsilon_i = \underline{L}_i^{1T} \delta \underline{q} + \underline{q}^{1T} \underline{L}_i^2 \delta \underline{q} \quad (5.2.4)$$

mens (5.2.3) giver

$$\delta \epsilon_i = \underline{L}_i^{1T} \delta \underline{q} \quad (5.2.5)$$

Udtrykkene (3.2.2) og (5.2.3) for tøjningerne samt (5.2.4) og (5.2.5) for variationen af tøjningerne stemmer parvis overens, hvis betingelsen

$$\underline{L}_i^2 \underline{q}_0 = 0 \quad (5.2.6)$$

er opfyldt.

Indføres (5.2.3) og (5.2.6) i egenværdiproblemet (5.2.1), reduceres dette til

$$(\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma) \underline{q} = 0, \quad (5.2.7)$$

hvor \underline{K}_σ er en matrix, der ofte betegnes som den geometriske matrix eller "the initial stress matrix". Den udtrykkes ved hjælp af (3.6.1.2) som

$$\underline{K}_\sigma = \int_A D^{ij} (\underline{q}_0^T \underline{L}_i^1) \underline{L}_j^2 dA, \quad (5.2.8)$$

hvor betegnelserne fra afsnit 3 er benyttet.

Den kritiske værdi bestemmes som den egenværdi til egenværdiproblemet (5.2.7), der har den numerisk set mindste værdi.

Da der normalt er et anseligt antal elementer i \underline{q} , er det sjældent gennemførligt at foretage bestemmelse af den kritiske værdi af belastningsparameteren gennem kendskab til samtlige egenværdier. En ofte benyttet metode består i vektoriteration efter følgende iterationsopskrift

- 1) \underline{q}_1^i gættes for $i = 0$
- 2) $\underline{z}^i = - \underline{K}_0^{-1} \underline{K}_\sigma \underline{q}_1^i$
- 3) $\lambda^i = [(\underline{q}_1^i)^T (\underline{q}_1^i)] / [(\underline{q}_1^i)^T \underline{z}^i]$
- 4) $\underline{q}_1^{i+1} = \underline{z}^i / \|\underline{z}^i\|$
- 5) $i \leftarrow i + 1$,

hvor trinnene 2) til 5) gentages indtil ændringen i tilnærmelsen for egenværdien (λ^1) er tilstrækkelig lille. Denne potensmetode kan direkte udvides til at omfatte bestemmelse af flere af de mindste egenværdier, idet der blot efter trin 2) foretages en ortogonalisering. Metoden har den fordel, at den alene består af enkle operationer som matrixprodukter og løsning af lineære ligninger. Den har imidlertid den ulempe, at effektiviteten er stærkt afhængig af fordelingen af de numerisk set mindste egenværdier. Konvergenshastigheden afhænger af forholdet mellem den numerisk set mindste og næstmindste egenværdi. Som følge heraf er det nødvendigt at foretage mange iterationstrin, hvis forholdet er tæt ved 1 eller -1 . Det kan endvidere ses, at forbedrede konvergensforhold kan påregnes, hvis problemet kan redefineres, således at det bestemmende egenværdiforhold får en numerisk set større værdi. Nedenfor omtales to fremgangsmåder, der kan benyttes til acceleration af konvergensforløbet.

Den ene metode består i at egenværdispektret forskydes. Egenværdiproblemet (5.2.7) omformes på følgende måde.

$$(\tilde{K}_0 + \lambda \tilde{K}_\sigma) \tilde{q}_1 = \{(\tilde{K}_0 + \lambda_0 \tilde{K}_\sigma) + \Delta \lambda \tilde{K}_\sigma\} \tilde{q}_1 = 0 \quad (5.2.9)$$

Størrelsen λ_0 skal vælges således, at den numerisk set er lidt mindre end den søgte egenværdi. Iterationsopskriften kan nu benyttes for (5.2.9) idet \tilde{K}_0 erstattes med $\tilde{K}_0 + \lambda_0 \tilde{K}_\sigma$ og λ med $\Delta \lambda$. Iterationen kan yderligere accelereres ved at justere λ_0 med passende mellemrum.

Den anden metode til forbedring af iterationsopskriften består i at inddrage et antal (M) vektorer i beregningen, således at konvergenshastigheden bestemmes af forholdet mellem den første og den M+1'te egenværdi, idet disse arrangeres efter voksende numerisk værdi. Metoden beskrives nedenfor.

Den bedste tilnærmelse til q_1 udtrykt som linearkombination af M prøvevektorer \tilde{z}_i søges bestemt. Tilnærmelsen \tilde{y} til q_1 gives ved

$$\underline{y} = c_I \underline{z}_I, \quad (5.2.10)$$

hvor c_I er skalare koefficienter. Tilnærmelsen indsættes i (5.2.7), idet egenværdien λ erstattes med tilnærmelsen λ^*

$$\underline{K}_0 \underline{z}_I c_I + \lambda^* \underline{K}_G \underline{z}_I c_I = 0. \quad (5.2.11)$$

Ligningen (5.2.11) multipliceres med \underline{z}_J^T , hvorved

$$\underline{z}_J^T \underline{K}_0 \underline{z}_I c_I + \lambda^* \underline{z}_J^T \underline{K}_G \underline{z}_I c_I =$$

$$(A_{JI} + \lambda^* B_{JI}) c_I = 0 \quad (5.2.12)$$

fremkommer. Denne ligning udtrykker et egenværdiproblem i M -dimensionale talrum, der indeholder koefficienterne c_I . Egenvektoren c_I angiver de optimale linearkombinationer af prøvevektorerne \underline{z}_i .

Den omtalte metode består i skiftevis at iterere efter potensmetoden og løse det lille egenværdiproblem (5.2.12). Iterationsopskriften er

1) gæt g_I^i for $i = 0$ og $I = 1, \dots, M$

$$2) \underline{z}_I = -\underline{K}_0^{-1} \underline{K}_G g_I^i$$

$$3) A_{IJ} = (g_I^i)^T \underline{K}_G \underline{z}_I$$

$$4) B_{IJ} = \underline{z}_I^T \underline{K}_G \underline{z}_J$$

5) løs egenværdiproblemet

$$(\underline{A} + \lambda^{(K)} \underline{B}) \underline{c}^{(K)} = \underline{0}$$

for $K = 1, \dots, M$

$$6) \quad \underline{y}_I = \sum_{K=1}^M \underline{z}_K c_I^{(K)}$$

$$7) \quad \underline{q}_I^{i+1} = \underline{y}_I / \|\underline{y}_I\|$$

$$8) \quad i \leftarrow i + 1$$

Udtrykket for \underline{A} i trin 4) fremkommer direkte af (5.2.12) idet

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= \underline{z}_I^T \underline{K}_0 \underline{z}_J = (\underline{q}_I^i)^T \underline{K}_\sigma \underline{K}_0^{-1} \underline{K}_0 \underline{z}_J \\ &= (\underline{q}_I^i)^T \underline{K}_\sigma \underline{z}_J. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Det ses endvidere, at \underline{A} er symmetrisk.

Det er nærliggende at forsøge at kombinere de to metoder til bestemmelse af den kritiske værdi, således at der først foretages en løsning af det lineære egenværdiproblem, derefter løses ligevægtsligningerne på et passende højt niveau. De herved bestemte flytninger danner udgangspunkt for opstilling af matricer svarende til \underline{K}_0 og \underline{K}_σ i (5.2.8). Herefter løses det opdaterede egenværdiproblem og en forhåbentlig forbedret tilnærmelse til egenværdien. I appendix A-5.1 sammenlignes resultater af de forskellige metoder til egenværdibestemmelse anvendt på et simpelt stangeeksempel.

5.3 Deformationsforhold efter forgrening.

For konstruktioner, der ikke geometrisk set er ekstremt simple, vil en analytisk bestemmelse af deformationsforløbet efter passage af et forgreningspunkt ikke være gennemførlig. I disse tilfælde må de styrende ligninger løses numerisk. Eventuelt kan forenklede antagelser medføre at en semi-analytisk løsning kan tilvejebringes.

Direkte numerisk behandling vil støde på mindst to problemer. Beregningerne er omfattende, og det er sjældent let at fastlægge en egnet parameter til at styre deformationsforløbet, da konstruk-

tionens stivhed kan være meget ringe i nærheden af et forgreningspunkt. Denne konstatering har resulteret i en række metoder, der er en direkte udvikling af den klassiske stabilitetsteori. Metoderne har deres udspring i Koiter's banebrydende arbejde [1]. Fælles for disse metoder er, at flytningsfeltet, der optræder efter forgreningen, kan udvikles efter en række funktioner, der kan bestemmes ved løsning af et egenverdiproblem samt en række lineære randverdiproblemer. De nævnte funktioner kan udover at tjene som basis i en tilnærmet beskrivelse af flytningsfeltet levere en række parametre - postbuckling koefficienter - der beskriver konstruktionens bæreevne efter forgreningen samt følsomheden overfor små geometriske imperfektioner.

I [2] er givet en forbilledlig klar fremstilling med udgangspunkt i ligevægtsligningerne (det virtuelle arbejdes princip) for det tilfælde, hvor der optræder en egenverdi, der numerisk set er tydeligt mindre end de øvrige. Der forudsættes ikke lineær opførsel før forgreningen.

Problemet med et antal simultane (laveste) egenverdier er behandlet i [3], mens det udvidede problem, i hvilket der optræder et antal tætliggende, men ikke nødvendigvis helt simultane egenverdier er behandlet i [4].

I det følgende vil det blive demonstreret, hvorledes udtrykkene fra [4] kommer til at se ud når den i afsnit 3 udviklede matrixnotation benyttes. Når det er resultater fra [4], der "oversættes", skyldes det, at udtrykkene fra [2] og [3] for tilfældet med lineær prebuckling umiddelbart fremkommer ved forenkling af de i [4] givne.

Det er i [4] forudsat, at spændinger og tøjninger varierer lineært med belastningsparameteren før forgreningen indtræffer. Forudsætningen synes at være opfyldt i en række af de tilfælde, hvor en asymptotisk analyse er hensigtsmæssig. Forudsættes ikke-lineær prebuckling bestemmes den kritiske last ved et ikke-lineært egenverdiproblem. Løsningen af dette vil i almindelighed være så omstændelig, at den asymptotiske metode ikke vil repræsentere den

ønskede forenkling i forhold til en fuldstændig ikke-lineær beregning af deformationsforholdene.

Den i [4] beskrevne undersøgelse behandler indflydelsen af tætliggende laveste egenverdier på bæreevneforringelsen som følge af imperfektioner på afstivede cirkulære cylinderskaller. Nedenfor anføres de vigtigste formler fra [4].

Tøjningerne beskrives ved hjælp af flytningerne, u , på følgende måde,

$$\varepsilon = l_1(u) + \frac{1}{2} l_2(u), \quad (3.2.2) \quad (5.3.1)$$

hvor l_1 , l_2 og l_{11} er en lineær, kvadratisk og bilinear differentialoperator. Forudsætningen om lineær prebuckling medfører

$$\varepsilon_{pb}(\lambda) = \lambda \cdot \varepsilon_0 = \lambda l_1(u_0) \quad (5.3.2)$$

$$l_{11}(u_0, v) = 0 \quad \text{for alle } v, \quad (5.3.3)$$

hvor index $_0$ angiver størrelser knyttet til prebucklingstilstanden og en enhedsværdi af lastparameteren. Differentialoperatoren l_{11} defineres ud fra l_2 ved følgende funktionalligning

$$l_2(u + v) = l_2(u) + 2l_{11}(u, v) + l_2(v). \quad (5.3.4)$$

Materialet beskrives ved at de generaliserende spændinger afhænger lineært af tøjningerne beskrevet ved (5.3.1). Afhængigheden beskrives ved afbildningen H , dvs.

$$\sigma = H[\varepsilon]. \quad (5.3.5)$$

Flytningsfeltet rækkeudvikles ud fra prebucklingstilstanden ved

$$u = \lambda u_0 + \xi_\alpha u_\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta u_{\alpha\beta}, \quad (5.3.6)$$

hvor u_α er den til λ_α hørende egenfunktion til egenværdiproblemet (5.2.7) Amplituden ξ_α er bestemt ved udtrykket

$$\begin{aligned}\xi_\alpha &= \{\sigma_0 \ell_{11}(u_\alpha, u)\} / \{\sigma_0 \ell_{11}(u_\alpha, u_\alpha)\} \\ &= \{H[\varepsilon_0] \ell_{11}(u_\alpha, u)\} / \{H[\varepsilon_0] \ell_{11}(u_\alpha, u_\alpha)\} \quad (5.3.7)\end{aligned}$$

Det må bemærkes, at udtrykkene i de krøllede paranteser normalt repræsenterer integraler over konstruktionens udstrækning.

Mens egenfunktionerne bestemmes som angivet i forrige afsnit, bestemmes koordinatfunktionerne $u_{\alpha\beta}$ ved randværdiproblemer med udseendet

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} \ell_1(\delta u) + \lambda \sigma_0 \ell_{11}(u_{\alpha\beta}, \delta u) \\ = -\frac{1}{2}[\sigma_\alpha \ell_{11}(u_\beta, \delta u) + \sigma_\beta \ell_{11}(u_\alpha, \delta u)] \quad (5.3.8)\end{aligned}$$

Ligningen er fremkommet ved, at flytningstilnærmelsen (5.3.6) er indsat i ligevægtsligningerne (i form af det virtuelle arbejdes princip)

$$\sigma \delta \varepsilon = \lambda q_0 \delta u, \quad (5.3.9)$$

og de led, der er kvadratiske i ξ_α , er samlet. Det ses, at lastparameteren indgår i (5.3.8). Det er uheldigt, da denne størrelse varierer med flytningstilstanden. I [2] og [3] er lastparameteren rækkeudviklet efter ξ_α , hvorefter koordinatfunktionerne i flytningstilnærmelsen og koefficienterne i udtrykket for λ kan bestemmes. I [4] opstilles et udtryk for den potentielle energi for en konstruktion med imperfektion af formen

$$u_{\text{imp}} = \bar{\xi}_\alpha u_\alpha, \quad (5.3.10)$$

dvs. af form som de betragtede egenfunktioner.

Ligninger, der forbinder ξ_α og λ , fremkommer ved at differentiere energien med hensyn til ξ_α . Ligevægtsligningerne har formen

$$\xi_A [1 - (\lambda/\lambda_A)] + \xi_\alpha \xi_\beta a_{\alpha\beta A} + \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma b_{\alpha\beta\gamma A} = (\lambda/\lambda_A) \bar{\xi}_A, \quad (5.3.11)$$

hvor der alene summeres over små græske indices.

Koefficienterne $a_{\alpha\beta A}$ og $b_{\alpha\beta\gamma A}$ bestemmes ved

$$a_{\alpha\beta A} = \{\sigma_A \ell_{11}(u_\alpha, u_\beta) + 2\sigma_\alpha \ell_{11}(u_\beta, u_A)\} / \{2\sigma_A \epsilon_A\} \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma A} = & \{\sigma_{A\alpha} \ell_{11}(u_\beta, u_\gamma) + \sigma_{\alpha\beta} \ell_{11}(u_\gamma, u_A) + \\ & + \sigma_A \ell_{11}(u_\alpha, u_{\beta\gamma}) + \sigma_\alpha \ell_{11}(u_A, u_{\beta\gamma}) + \\ & + 2\sigma_\alpha \ell_{11}(u_\beta, u_{\gamma A})\} / \{2\sigma_A \epsilon_A\}. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Koordinatfunktionerne $u_{\alpha\beta}$ bestemmes af (5.3.8) med den laveste egenverdi indsat for λ .

Ved at indføre de i afsnit 3 benyttede størrelser, kan (5.3.8) skrives på formen

$$\tilde{K}_B g_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{B\alpha\beta} \quad (5.3.14)$$

hvor matricerne \tilde{K}_B og $\tilde{R}_{B\alpha\beta}$ opbygges af elementbidrag

$$\tilde{K}_B = \sum_{el} \tilde{K}_B^{el} \quad (5.3.15)$$

$$\tilde{R}_{B\alpha\beta} = \sum_{el} \tilde{R}_{B\alpha\beta}^{el} \quad (5.3.16)$$

med

$$\begin{aligned} \tilde{K}_B^{el} &= \int_{A_{el}} D_{ij} [L_i^1 L_j^1 + \lambda_c (L_i^{1T} g_0) L_j^2] dA \\ &= \tilde{K}_0^{el} + \lambda_c \int_{A_{el}} D_{ij} (L_{id}^{1T} g_0) L_j^2 dA \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{R\alpha\beta}^{el} &= - \int_{A_{el}} D_{ij} [(q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^2 q_{\beta}) \tilde{L}_j^1 + (q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^1) q_{\beta}^T \tilde{L}_j^2 \\
&\quad + (q_{\beta}^T \tilde{L}_i^1) q_{\alpha}^T \tilde{L}_j^2] dA \\
&= - \int_{A_{el}} D_{ij} [(\tilde{d}_{\alpha}^{*T} \tilde{L}_{id}^2 \tilde{d}_{\beta}^*) \tilde{L}_j^1 + \\
&\quad + \{ (\tilde{d}_{\alpha}^T \tilde{L}_{id}^1) \tilde{d}_{\beta}^* + (\tilde{d}_{\beta}^T \tilde{L}_{id}^1) \tilde{d}_{\alpha}^* \} \tilde{L}_{jd}^2 \tilde{N}_d^* \tilde{E}_e \tilde{D}_e] dA . \quad (5.3.18)
\end{aligned}$$

Det ses, at \tilde{K}_B er identisk med koefficientmatricen i egenværdiproblemet (5.2.7) for $\lambda = \lambda_c$. For at opnå en entydig løsning til randværdiproblemet (5.3.14) må det løses sammen med en orthogonalitetsbetingelse mellem $\tilde{q}_{\alpha\beta}$ og egenvektoren hørende til λ_c , der nedenfor betegnes \tilde{q}_c . I analogi med (5.3.7) kan betingelsen vælges til

$$\sigma_0 \ell_{11}(u_{\alpha\beta}, u_c) = 0 \quad (5.3.19)$$

eller

$$\int_A D_{ij} (\tilde{L}_i^1 q_0) q_c^T \tilde{L}_j^2 \tilde{q}_{\alpha\beta} dA = \tilde{y}_B^T \tilde{q}_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.3.20)$$

Når felterne u_{α} og $u_{\alpha\beta}$ repræsenteret ved knudedeflytningsvektorerne \tilde{q}_{α} og $\tilde{q}_{\alpha\beta}$ er bestemt, kan postbucklingkoefficienterne $a_{\alpha\beta A}$ og $b_{\alpha\beta\gamma A}$ bestemmes. Udtrykket for den fælles nævner er

$$2\sigma_A \epsilon_A = 2 \int_A H[\ell_1(u_A)] \ell_1(u_A) dA = 2 \tilde{q}_A^T \tilde{K}_0 \tilde{q}_A \quad (5.3.21)$$

Bidragene til tællerne i (5.3.12) og (5.3.13) dannes elementvis

$$\begin{aligned}
\Delta a_{\alpha\beta A} &= \int_{A_{el}} D_{ij} [(q_A^T \tilde{L}_i^1) (q_{\alpha}^T \tilde{L}_j^2 q_{\beta}) + 2(q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^1) (q_{\beta}^T \tilde{L}_j^2 q_A)] dA \\
&= \int_{A_{el}} D_{ij} [(\tilde{d}_A^T \tilde{L}_{id}^1) (\tilde{d}_{\alpha}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 \tilde{d}_{\beta}^*) + 2(\tilde{d}_A^T \tilde{L}_{id}^1) (\tilde{d}_{\beta}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 \tilde{d}_A)] dA \\
&\quad (5.3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta b_{\alpha\beta\gamma A} &= \int_{A_{el}} D_{ij} \left[\left\{ (q_{A\alpha}^T \tilde{L}_i^1) + \frac{1}{2} (q_{A\alpha}^T \tilde{L}_i^2 q_{\alpha}) \right\} (q_{\beta}^T \tilde{L}_j^2 q_{\gamma}) \right. \\
&\quad + \left\{ (q_{\alpha\beta}^T \tilde{L}_i^1) + \frac{1}{2} (q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^2 q_{\beta}) \right\} (q_{\gamma}^T \tilde{L}_j^2 q_A) \\
&\quad + (q_{A\alpha}^T \tilde{L}_i^1) (q_{\alpha}^T \tilde{L}_j^2 q_{\beta\gamma}) + (q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^1) (q_{A\alpha}^T \tilde{L}_j^2 q_{\beta\gamma}) \\
&\quad \left. + 2 (q_{\alpha}^T \tilde{L}_i^1) (q_{\beta}^T \tilde{L}_j^2 q_{\gamma A}) \right] dA \\
&= \int_{A_{el}} D_{ij} \left[\left\{ (d_{A\alpha}^T \tilde{L}_{id}^1) + \frac{1}{2} (d_{A\alpha}^{*T} \tilde{L}_{id}^2 d_{\alpha}) \right\} (d_{\beta}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 d_{\gamma}^*) \right. \\
&\quad + \left\{ (d_{\alpha\beta}^T \tilde{L}_{id}^1) + \frac{1}{2} (d_{\alpha}^{*T} \tilde{L}_{id}^2 d_{\beta}^*) \right\} (d_{\gamma}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 d_A^*) \\
&\quad + (d_{A\alpha}^T \tilde{L}_{id}^1) (d_{\beta\gamma}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 d_{\alpha}^*) + (d_{\alpha}^T \tilde{L}_{id}^1) (d_{\beta\gamma}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 d_A^*) \\
&\quad \left. + 2 (d_{\alpha}^T \tilde{L}_{id}^1) (d_{\gamma A}^{*T} \tilde{L}_{jd}^2 d_{\beta}^*) \right] dA
\end{aligned}$$

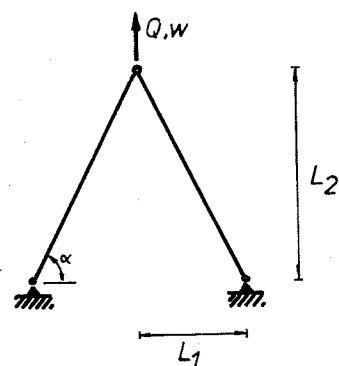
De størrelser, der er angivet i runde paranteser er skalarer. Ved en numerisk beregning af de forskellige størrelser vil udtrykkene der indeholder tilstandsvektorerne , \underline{d} og \underline{d}^* , give en effektiv udregning.

REFERENCER - AFSNIT 5

- [1] Koiter, W.T.: On the Stability of Elastic Equilibrium. Afhandling, Delft Univ., H.J. Paris, Amsterdam, 1945 (hollandsk udgave). Alternativt NASA TT-F10,833, 1967 eller Air Force Flight Dynamics Lab., AFFDL-TR-70-25, 1970.
- [2] Fitch, J.R.: The Buckling and Post-Buckling Behavior of Spherical Caps under Concentrated Load. Int. J. Solids. Structures, 1968, Vol. 4, pp. 421-446.
- [3] Koiter, W.T.: Elastic Stability and Post-Buckling Behaviour. Nonlinear Problems, ed. R.E. Langer, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.
- [4] Byskov, E., Hutchinson J.W.: Mode Interaction in Axially Stiffened Cylindrical Shells. AIAA-Journal, Vol. 15, No. 7, July 1977, pp. 941-948.
- [5] Byskov, E.: Elementmetoden. Store flytninger og store tøjninger. Forelæsningsnotat F51, 1974, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole.
- [6] Kanodia, V.L., Gallagher, R.H., Mang, H.A.: Instability Analysis of Torospherical Pressure Vessel Heads with Triangular Thin-Shell Finite Elements. Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME, Vol. 99, Feb. 1977, pp. 64-74.

Appendix A - 5.1

Forskellige metoder til bestemmelse af kritisk tilstand afprøvet på et simpelt stangeksempel.



Den betragtede konstruktion er vist på figuren. Stængerne har tværsnitsarealet A og har i den ubelastede tilstand længden $D = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$. Materialet er hyperelastisk, dvs. den relative forlængelse, ϵ_L , og normalkraften er forbundet ved relationen

$$N = E A (\epsilon_L + \frac{1}{2} \epsilon_L^2) . \quad (A-5.1.1)$$

En analytisk behandling ^{*)} af den betragtede konstruktion viser, at den kritiske tilstands natur er bestemt af vinklen α , således optræder der for $\alpha > \pi/3$ en bifurkation med en usymmetrisk deformation efter forgreningen. Den kritiske værdi for Q er givet ved

$$Q_{cr} = - E A \sin(2\alpha) \cos\alpha \quad (A-5.1.2)$$

idet der regnes med lineær opførsel før bifurkationen. En beregning med hensyntagen til den ikke-lineære prebucklingstilstand giver følgende udtryk

^{*)} De analytiske resultater er venligst stillet til rådighed af lektor, lic.techn. Esben Byskov, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH.

$$Q_{cr} = -E \cdot A \cdot 2 \cos^2 \alpha \sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha} \quad (A-5.1.3)$$

For $\alpha < \pi/3$ følges den kritiske tilstand af et symmetrisk gennemslag. Grænselasten er givet ved

$$Q_{cr} = EA \times \frac{2}{9} \sqrt{3} \sin^3 \alpha \quad (A-5.1.4)$$

Det ses ved udregning, at den værdi for Q_{cr} , der hører til (A-5.1.3), er større end den, der hører til (A-5.1.4). Imidlertid viser udtrykkene for nedbøjningen af kraftangrebspunktet, at den kritiske værdi hørende til den mindste nedbøjning er givet ved (A-5.1.4) for $\alpha < \pi/3$ og ved (A-5.1.3) for $\alpha > \pi/3$.

Bestemmelse af kritisk værdi ved hjælp af determinanten for tangentstivhedsmatricen.

Ved trinvis forøgelse af belastningen Q med efterfølgende bestemmelse af ligevægtstilstanden og udregning determinanten for tangentstivhedsmatricen viser det sig, at bestemmelse af den kritiske værdi foregår helt ukompliceret. Nedenfor anføres en række resultater, der er opnået ved benyttelse af en let modificeret version af det i [5] beskrevne elementmetodeprogram, FEMBAR, der foretager en ikke-lineær beregning af et stangsystem.

BIFURKATION				
L_2/L_1	α	(A-5.1.3)	Q_{cr}^{FEM}	forhold
1.75	60.25°	-.251770	-.252800	.9959
2.00	63.43°	-.252982	-.253010	.9999
2.50	68.20°	-.211211	-.211211	1.0000
3.00	71.57°	-.167332	-.167342	.9999

GRÆNSELAST				
L_2/L_1	α	(A-5.1.4)	Q_{cr}^{FEM}	forhold
1.70	59.53°	-.246473	-.248976	.9899
1.50	56.31°	-.221716	-.22289	.9947
1.00	45.00°	-.136827	-.138089	.9909
.50	26.56°	-.034426	-.034461	.9990

Tilnærmelser for determinantnulpunktet kan fås ved at interpolere sammenhørende værdier af belastning og determinant. Det viser sig, at en svagt underrelaxeret extrapolation giver udmærkede resultater, når blot de benyttede belastninger ikke alle ligger under halvdelen af den kritiske værdi.

Bestemmelse af kritisk værdi ved løsning af en række lineære egenværdiproblemer.

Den kritiske tilstand er karakteriseret ved, at tangentstivhedsmatricen er singulær, dvs. følgende ligning er opfyldt

$$\tilde{K}_T q_1 = 0. \quad (A-5.1.5)$$

Det er i afsnit 5.1 vist, at (A-5.1.5) ved forudsætning om lineær prebuckling reduceres til

$$(\tilde{K}_0 + Q \tilde{K}_Q) q_1 = 0 \quad (A-5.1.6)$$

For at kunne omforme (A-5.1.5) opdeles flytningerne i en lineær og ikke-lineær del, dvs.

$$q = Q q_0 + q_{NL} \quad (A-5.1.7)$$

Ved at benytte (A-5.1.7) kan (A-5.1.5) omformes til

$$\{\tilde{K}_T(q_{NL}) + Q \tilde{K}_S(q_0, q_{NL}, Q)\} q_1 = 0. \quad (A-5.1.8)$$

Det undersøges om (A-5.1.8) kan benyttes til iterativ bestemmelse af Q , idet hvert trin indeholder løsning af ligevægtsligningerne samt et lineært egenværdiproblem.

BEREGNING MED $L_2 = 2L_1$ ($\alpha = 63.43^\circ$, $Q_{cr} = -.253$)			
Q	Q_{ev}	w_{eq}	w_{nl}
0.00	-.35777	.0000	.0000
-0.04	-.36146	-.29217	-.0127
-0.08	-.36198	-.61447	-.0555
-0.12	-.35808	-.97683	-.1383
-0.16	-.34764	-1.3959	-.2780
-0.20	-.32653	-1.9035	-.5060
-0.24	-.28476	-2.5723	-.8952

hvor w_{eq} betegner nedbøjningen under kraften, w_{nl} den ikke-lineære del af w_{eq} .

Den fundne egenværdi betegnes med Q_{ev} . Det ses, at for dette eksempel er de værdier, man får enten tæt ved den klassiske værdi (-0.358) eller også repræsenterer iterationen ikke en kontraktion. Værdien $Q = -0.24$ er ca. 5% forkert, mens fejlen på $Q = -0.285$ er ca. 12%. Resultater fra en nøjere undersøgelse omkring egenværdien er anført i tabellen.

Q	Q_{ev}	w_{eq}	w_{nl}
-0.242	-0.27695	-2.6513	-0.9603
-0.244	-0.27308	-2.6983	-0.9933
-0.246	-0.26915	-2.7456	-1.0266
-0.248	-0.26501	-2.7945	-1.0984
-0.250	-0.26060	-2.8453	-1.0984

Tilsvarende undersøgelser for andre værdier af α giver resultater, der kvalitativt minder om de her præsenterede.

Eksemplet viser, at den ikke-lineære opførsel før den kritiske værdi ikke altid kan negligeres. Det viser endvidere, at bestemmelsen af den kritiske værdi som nulpunkt for determinanten for tangentstivhedsmatricen er en mere pålidelig metode end den foreslåede metode, der indebærer løsning af en række lineære egenverdiproblemer.

En forudsætning for, at beregningsforløbet med determinant-metoden er ukompliceret, og at forsigtig extrapolation kan anvendes, er, at determinantværdien er monotont aftagende for voksende belastninger. Denne opførsel har karakteriseret alle de præsenterede numeriske eksempler. Det er dog ikke tilfældet for samtlige tilfælde, hvor der opstår stabilitetsproblemer. Der er fx i [6] vist et eksempel på beregning af en rotationssymmetrisk tank med indre overtryk. Tankens top er af et kuglesegment. Top og side forbindes med en del af en torus, dvs. frembringerkurven for den rotationssymmetriske konstruktion består af tre dele med konstant krumning. Ved et passende højt indre tryk optræder et

instabilitetsfænomen i forbindelsesområdet, da ringtøjningen i siden er større end den, der optræder i topstykket. Følges værdien af determinanten for voksende belastning ses det, at den vokser monotont indtil umiddelbart før den kritiske last, hvor den pludseligt falder.

6. FORENKLET BEREGNING AF IMPERFEKTE CIRKULÆRE CYLINDERSKALLER.

6.1 Indledning.

Når der foretages en bestemmelse af spændinger, tøjninger etc. for en konstruktion, kan formålet være et af to. Det kan være en beregning, der foretages i en indledende fase af en konstruktions udformning, hvor målet er at tilvejebringe tilstrækkelig information til, at et endeligt valg af geometri og tolerancer kan foretages på en rationel måde. Den anden type af beregning består i en eftervisning af, at en kendt konstruktion kan optage en foreskreven belastning.

I begge situationer er det naturligvis ønskeligt, at beregningerne foretages simplest muligt, men da der ofte foretages indledende analyse af en række alternative konstruktionsudformninger, er det specielt af vigtighed, at de indledende beregninger foregår så enkelt, at alle relevante udformninger kan analyseres.

I det følgende beskrives en metode til analyse af imperfekte cirkulære cylinderskaller. Metoden er en energimetode, der består af følgende trin. Flytningsfeltet diskretiseres, den potentielle energi udtrykkes som funktion af flytningsfeltets parametre. Ligevægtstilstande bestemmes ved, at den afledede af den potentielle energi med hensyn til flytningsparametrene sættes lig med nul. Ligevægtsligningerne bliver algebraiske ligninger, der sædvanligvis må løses numerisk.

Den sædvanligvis benyttede metode består i, at flytningstilnærmelsen indføres i et sæt ligevægtsligninger (fx. Donnell-Vlasov-ligningerne). Ligningerne løses så tilnærmet, idet der benyttes en Galerkin-metode, hvor ligevægtsligningerne multipliceres med passende vægtfunktioner. En efterfølgende integration af de vægtede ligevægtsligninger resulterer i et algebraisk ligningssystem.

Det synes - i det mindste for forfatteren - enklere at vurdere de begåede fejl ved at anvende den her beskrevne metode, hvor tilnærmelsen alene ligger i flytningstilnærmelsen.

6.2. Notation.Geometriske og fysiske konstanter.

R : Radius i den perfekte cirkulære cylinder
 t : Skaltykkelse
 L : Længde i frembringerretningen, karakteristisk for bølgemønstre og geometri
 W^0 : Imperfektion af skalfladen, regnet positivt mod cylinderaksen

$$w_0 = W^0/t$$

E : Elasticitetskoefficient (Youngs's modulus)

ν : Tværkontraktionsforhold (Poisson's forhold)

$$c = \sqrt{3(1-\nu^2)}$$

$$q_0 = \sqrt{2cR/t}$$

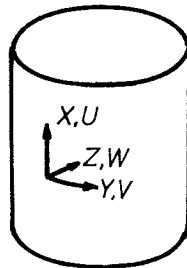
Koordinater.

Fig. 6.2.1

X : Buelængde i frembringerretningen
 Y : Buelængde i ringretningen
 Z : Afstand målt positivt mod symmetriaksen
 $x = Xq_0/R$: Dimensionsløs X-koordinat
 $y = Yq_0/R$: Dimensionsløs Y-koordinat
 $\zeta = \lambda x$: Dimensionsløs X-koordinat
 $\eta = \mu y$: Dimensionsløs Y-koordinat

$\lambda = n\pi \frac{R}{Lq_0}$: Bølgetal i frembringerretningen
 $\mu = m/q_0$: Bølgetal i ringretningen
 n : Bølgeindex for frembringerretningen
 m : Bølgeindex for ringretningen

Flytninger.

U : Flytning i X-retningen
 V : Flytning i Y-retningen
 W : Flytning i Z-retningen
 $u = U/t$
 $v = V/t$
 $w = W/t$

Spændingsfunktion.

F : Spændingsfunktion,
 $F_{XX} = N_{YY}, F_{XY} = -N_{XY}, F_{YY} = N_{XX}$
 $f = \frac{2Fc}{Et^3}$: Dimensionsløs spændingsfunktion

Operatorer.

$(.)'_x = \frac{\partial}{\partial x} (.)$
 $(.)'_y = \frac{\partial}{\partial y} (.)$
 $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$: Dimensionsløs Laplaceoperator
 $(.)_x = \frac{\partial}{\partial x} (.)$
 $(.)_y = \frac{\partial}{\partial y} (.)$

6.3 Benyttede tøjningsmål for en imperfekt skalkonstruktion af næsten cirkulærcylindrisk form.

Ved opstillingen af tøjningsmål for den imperfekte konstruktion tages udgangspunktet i de tøjningsudtryk, der gælder for den perfekte konstruktion. De tøjninger, der optræder, idet den imperfekte konstruktion deformeres fra en ubelastet tøjningsfri tilstand til en deformeret tilstand, bestemmes som de tøjningsændringer, der vil optræde, idet en perfekt konstruktion deformeres fra en deformeret tilstand - svarende til den imperfekte konstruktions udgangstilstand - til en anden, der svarer til den imperfekte konstruktions sluttetilstand. Når der benyttes Lagrange-tøjninger fører brugen af den perfekte konstruktion som referencesystem til korrekte udtryk for tøjningerne. I den følgende fremstilling repræsenterer de imidlertid en tilnærmelse, hvis karakter vil blive belyst gennem et endimensionalt eksempel.

For en perfekt cirkulærcylindrisk skal benyttes ofte følgende forenklede flytnings- tøjningsrelation, der alene indeholder ikke-linearitet knyttet til flytningen i skalnormalens retning

$$\epsilon_X = U_X + \frac{1}{2} W_X W_X \quad (6.3.1)$$

$$\epsilon_{XY} = \frac{1}{2} (U_Y + V_X) + \frac{1}{2} W_X W_Y \quad (6.3.2)$$

$$\epsilon_Y = V_Y - \frac{1}{R} W + \frac{1}{2} W_Y W_Y \quad (6.3.3)$$

$$\kappa_X = W_{XX} \quad (6.3.4)$$

$$\kappa_{XY} = W_{XY} \quad (6.3.5)$$

$$\kappa_Y = W_{YY} , \quad (6.3.6)$$

hvor ϵ_X , ϵ_{XY} og ϵ_Y er strækninger, og κ_X , κ_{XY} og κ_Y er krumningsændringer. Den imperfekte konstruktion kan beskrives ved, at den perfekte påføres flytningen W^0 . Tøjningerne for den imperfekte konstruktion kan da, som nævnt (tilnærmet) angives som

$$\epsilon_X = U_X + \frac{1}{2} W_X W_X + W_X^0 W_X \quad (6.3.7)$$

$$\epsilon_{XY} = \frac{1}{2} (U_Y + V_X) + \frac{1}{2} W_X W_Y + \frac{1}{2} (W_X^0 W_Y + W_X W_Y^0) \quad (6.3.8)$$

$$\varepsilon_Y = V_Y - \frac{1}{R} W + \frac{1}{2} W_Y W_Y + W_Y^0 W_Y \quad (6.3.9)$$

$$\kappa_X = W_{XX} \quad (6.3.10)$$

$$\kappa_{XY} = W_{XY} \quad (6.3.11)$$

$$\kappa_Y = W_{YY} \quad (6.3.12)$$

hvor W betegner flytningen i retning af normalen for den perfekte reference skal. Indføres dimensionsløse flytninger og koordinater fremstår følgende udtryk

$$\varepsilon_X = tq_0/R(u' + (tq_0/R)(\frac{1}{2}w'w' + w'_0 w')) \quad (6.3.13)$$

$$\varepsilon_{XY} = (tq_0/R) \frac{1}{2}(u' + v' + (tq_0/R)(w'w' + w'_0 w' + w'w'_0)) \quad (6.3.14)$$

$$\varepsilon_Y = t/R(q_0 v' - w + (t/R)q_0^2(\frac{1}{2}w'w' + w'w'_0)) \quad (6.3.15)$$

$$\kappa_X = 2c/Rw'' \quad (6.3.16)$$

$$\kappa_{XY} = 2c/Rw'' \quad (6.3.17)$$

$$\kappa_Y = 2c/Rw'' \quad (6.3.18)$$

Som nævnt tidligere demonstreres en direkte udledning af de analoge udtryk for en bjælke.

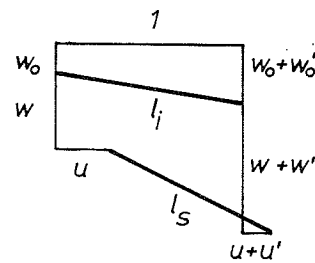


Fig. 6.3.1

På figuren er vist et "enhedsstykke" af en imperfekt bjælke. Længderne på figuren er givet ved

$$l_i \approx \sqrt{1 + (w'_0)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(w'_0)^2 \quad (6.3.19)$$

$$l_s \approx \sqrt{(1+u')^2 + (w+w_0)^2} \approx 1 + u' + \frac{1}{2}(w+w_0)^2 \quad (6.3.20)$$

Forlængelsen af bjælkestykket er

$$\Delta l \approx u' + \frac{1}{2}w'w' + w_0'w' \quad (6.3.21)$$

Længdetøjningen bestemmes af (6.3.19) og (6.3.21) som

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \approx \Delta l (1 - (\frac{1}{2}w_0')^2) \quad (6.3.22)$$

Hvis alene led, der er højst kvadratiske i flytninger og w_0 , medtages, fremkommer et udtryk som (6.3.7)

6.4 Udtryk for den potentielle energi.

I det opstillede udtryk for den potentielle energi medtages bidrag fra ydre fordelt kraftbelastning langs skallens ender. Andre belastningstyper kan inddrages på tilsvarende måde.

Tøjningerne arrangeres i vektorer på følgende måde:

$$\underline{\varepsilon}^T = [\varepsilon_X \quad \varepsilon_{XY} \quad \varepsilon_Y] \quad (6.4.1)$$

$$\underline{\kappa}^T = [\kappa_X \quad \kappa_{XY} \quad \kappa_Y] \quad (6.4.2)$$

Det forudsættes, at det betragtede materiale er karakteriseret ved, at den specifikke tøjningsenergi er en kvadratisk form i tøjningsmålene med udseendet

$$\phi = \frac{1}{2}C[\underline{\varepsilon}^T \underline{H} \underline{\varepsilon} + S \underline{\kappa}^T \underline{H} \underline{\kappa}] \quad (6.4.3)$$

hvor C og S er konstanter, der beskriver stræk- og bøjningsstivheden. De udtrykkes ved

$$C = Et/(1-\nu^2) \quad S = t^2/12, \quad (6.4.4)$$

hvor E er elasticitetskoefficienten, ν tværkontraktionsforholdet og t skaltykkelsen. Matricen \underline{H} har udseendet

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.5)$$

Det ses, at tøjningsenergiudtrykket opskrevet i tøjningsmålene er identisk med det, der gælder for en isotrop plade-skive. De

konstitutive ligninger kan umiddelbart opskrives. Membrankræfterne gives ved

$$N_X = C (\epsilon_X + \nu \epsilon_Y) \quad (6.4.6)$$

$$N_{XY} = C (1-\nu) \epsilon_{XY} \quad (6.4.7)$$

$$N_Y = C (\epsilon_Y + \nu \epsilon_X) \quad (6.4.8)$$

Inverteres (6.4.6-8) fremkommer

$$\epsilon_X = \frac{1}{Et} (N_X - \nu N_Y) \quad (6.4.9)$$

$$\epsilon_{XY} = \frac{1}{Et} (1 + \nu) N_{XY} \quad (6.4.10)$$

$$\epsilon_Y = \frac{1}{Et} (-\nu N_X + N_Y) \quad (6.4.11)$$

Ved at indføre de opstillede udtryk i (6.4.3) kan den specifikke tøjningsenergi udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} \frac{1}{Et} (N_X N_X + N_Y N_Y - 2\nu N_X N_Y + 2(1+\nu) N_{XY} N_{XY}) \\ & + \frac{1}{2} C \cdot S (\kappa_X \kappa_X + \kappa_Y \kappa_Y + 2\nu \kappa_X \kappa_Y + 2(1-\nu) \kappa_{XY} \kappa_{XY}) . \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Den potentielle energi kan nu skrives som

$$\pi_P = \int_A \phi \, dA - \int_S \bar{p} \, U \, dS , \quad (6.4.13)$$

idet A angiver skalfladen, S den belastede rand og \bar{p} den foreskrevne randlast.

6.5 Introduktion af en spændingsfunktion i udtrykket for den potentielle energi.

Til bestemmelse af ligevægtstilstande benyttes variationsprincippet "Stationær Potentiel Energi". Det bemærkes, at membrankræfterne, der indgår i udtrykket (6.4.13), ikke varierer frit, men bestemmes ved flytningerne gennem de konstitutive ligninger og tøjnings-flytningsrelationen. Ved direkte indsættelse kan variationsproblemets Eulerligninger bestemmes. De til flytningerne U og V knyttede er

$$N_{X,X} + N_{XY,Y} = 0 \quad (6.5.1)$$

$$N_{XY,X} + N_{Y,Y} = 0 \quad (6.5.2)$$

Det ses, at disse (ligevægts) ligninger opfyldes, hvis snitkræfterne kan afledes af en spændingsfunktion F , der har egenskaberne

$$F_{XX} = \frac{E t^2}{R} f'' = N_Y \quad (6.5.3)$$

$$F_{XY} = \frac{E t^2}{R} f'' = -N_{XY} \quad (6.5.4)$$

$$F_{YY} = \frac{E t^2}{R} f'' = N_X \quad (6.5.5)$$

Størrelsen f er en dimensionsløs spændingsfunktion. Spændingsfunktionen må vælges således, at der altid ved integration af t øjningerne kan opstilles et tilhørende flytningsfelt. Nedenfor udledes en nødvendig betingelse herfor. Det vises dernæst, at betingelsen er tilstrækkelig.

Udtrykkes stræktøjningerne ved (6.3.13-15) og (6.5.3-5) fremkommer identiteterne

$$\epsilon_X = \frac{t}{R}(f'' - v f'') = \frac{t}{R}(q_0 u' + c w'(w' + 2w_0')) \quad (6.5.6)$$

$$\epsilon_{XY} = -\frac{t}{R}(1+v)f'' = \frac{t}{R}(\frac{1}{2}q_0(u' + v') + c(w'w' + w'w_0' + w_0'w_0')) \quad (6.5.7)$$

$$\epsilon_Y = \frac{t}{R}(f'' - v f'') = \frac{t}{R}(q_0 v' - w + c w'(w' + 2w_0')) \quad (6.5.8)$$

Elimineres u og v af disse ligninger fremstår den nødvendige betingelsesligning mellem f og w

$$\Delta \Delta f + w'' + c \psi(w, w + 2w_0) = 0 \quad (6.5.9)$$

hvor ψ er en bilinear differential-operator, der defineres ved

$$\psi(g, h) = g''h'' + g''h'' - 2g''h'' \quad (6.5.10)$$

At ligning (6.5.9) er en tilstrækkelig betingelse vises herefter. Udtrykkene (6.5.6-8) kan bringes på formen

$$u' = U_1 \quad (6.5.11)$$

$$v' = U_2 \quad (6.5.12)$$

$$u' + v' = U_3 \quad (6.5.13)$$

Ved integration af de første udtryk fremkommer

$$u = \int U_1 dx + u_p(y) \quad (6.5.14)$$

$$v = \int U_2 dy + v_p(x) \quad (6.5.15)$$

der ved indsættelse i (6.5.13) giver

$$U_3 = \int U_1' dx + u_p'(y) + \int U_2' dy + v_p'(x) \quad (6.5.16)$$

Ved elimination af u og v fra (6.5.11-13) fremkommer

$$U_3'' = U_1'' + U_2'' \quad (6.5.17)$$

der blot er en anden måde at skrive (6.5.9) på. U_3 kan direkte bestemmes ved integration

$$U_3 = \int U_1' dx + \int U_2' dy + f_1(x) + f_2(y) \quad (6.5.18)$$

hvor f_1 og f_2 fremkommer ved integrationen. Det ses, at (6.5.16) og (6.5.18) har samme form. Det vil sige, at (6.5.9) er en tilstrækkelig betingelse for kompatibilitet.

Den potentielle energi (6.4.13) kan nu udtrykkes som en funktional med F og W som indgående funktioner. Betingelsesligningen (6.5.9) indgår blandt sidebetingelserne i variationsprincippet "Stationær Potentiel Energi".

6.6 Tilnærmet udtryk for den potentielle energi.

Fremgangsmåden i den tilnærmede metode kan sammenfattes i følgende punkter:

- Der skønnes et tværflytningsfelt, w, der afhænger af et endeligt antal parametre.
- Der bestemmes et partikulært integral til kompatibilitetsligningen (6.5.9).

- c) Ved at supplere spændingsfunktionen med løsninger til den homogene ligning $\Delta \Delta f = 0$ opfyldes randbetingelserne.
- d) Udtrykket for den potentielle energi opstilles. Resultatet er en funktion af w-feltets parametre.
- e) Løsninger bestemmes ved at minimere den potentielle energi med hensyn til de indgående parametre.

Det skønnede tværflytningsfelt har formen

$$w = \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \cos(\alpha_1 \zeta) \cos(\beta_1 \eta) , \quad (6.6.1)$$

hvor α_1 og β_1 er ikke-negative hele tal. Der summeres over gentagne α_1 og β_1 . Den betragtede imperfektion udtrykkes på samme måde som flytningsfeltet, dvs.

$$w_0 = \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^0 \cos(\alpha_0 \zeta) \cos(\beta_0 \eta) . \quad (6.6.2)$$

Kompatibilitetsligningen (6.5.9) får udseendet

$$\begin{aligned} \Delta \Delta f &= -w'' - c \psi(w, w + 2w_0) \\ &= \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \lambda^2 \alpha_1^2 \cos(\alpha_1 \zeta) \cos(\beta_1 \eta) \\ &\quad - c \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) \lambda^2 \mu^2 [\alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2] \times \\ &\quad \times \cos(\alpha_1 \zeta) \cos(\beta_1 \eta) \cos(\alpha_2 \zeta) \cos(\beta_2 \eta) , \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

der ved hjælp af additionsformlerne omformes til

$$\begin{aligned} \Delta \Delta f &= \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \alpha_1^2 \lambda^2 \cos(\alpha_1 \zeta) \cos(\beta_1 \eta) \\ &\quad - \frac{1}{4} c \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) \lambda^2 \mu^2 [\alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2] \times \\ &\quad \times [\cos((\alpha_1 + \alpha_2) \zeta) (\cos((\beta_1 + \beta_2) \eta) + \cos(|\beta_1 - \beta_2| \eta)) + \\ &\quad + \cos(|\alpha_1 - \alpha_2| \zeta) (\cos((\beta_1 + \beta_2) \eta) + \cos(|\beta_1 - \beta_2| \eta))] . \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Efter denne omformning kan identiteten

$$k \cos(\alpha\zeta) \cos(\beta\eta) = \Delta\Delta \left[\frac{k}{(\alpha^2\lambda^2 + \mu^2\beta^2)^2} \cos(\alpha\zeta) \cos(\beta\eta) \right] \quad (6.6.5)$$

benyttes til at opstille et partikulært integral til (6.6.4).
Det får udseendet

$$\begin{aligned} f_p = & \gamma_{\alpha_1\beta_1} K_O(\alpha_1, \beta_1) \cos(\alpha_1\zeta) \cos(\beta_1\eta) - c \gamma_{\alpha_1\beta_1} (\gamma_{\alpha_2\beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2\beta_2}^0) \times \\ & \times \{ K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \cos((\alpha_1 + \alpha_2)\zeta) \cos((\beta_1 + \beta_2)\eta) \\ & + K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, -\beta_2) \cos((\alpha_1 + \alpha_2)\zeta) \cos(|\beta_1 - \beta_2|\eta) \\ & + K(\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1, \beta_2) \cos(|\alpha_1 - \alpha_2|\zeta) \cos((\beta_1 + \beta_2)\eta) \\ & + K(\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1, -\beta_2) \cos(|\alpha_1 - \alpha_2|\zeta) \cos(|\beta_1 - \beta_2|\eta) \} , \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

hvor forkortelserne

$$K_O(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2\lambda^2}{(\alpha^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2)^2} \quad (6.6.7)$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{4}\lambda^2\mu^2 \left[\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2\lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2\mu^2} \right]^2 \quad (6.6.8)$$

er benyttet. Det ses, at f_p har samme form som w , og udtrykket (6.6.6) kan omordnes til

$$f_p = \varphi_{a_1b_1} \cos(a_1\zeta) \cos(b_1\eta), \quad (6.6.9)$$

hvor a_1 og b_1 er ikke-negative heltal. Der summeres over de aktuelle værdier ved gentagne a_i og b_i . Koefficienten $\varphi_{a_1b_1}$ udtrykkes ved $\gamma_{\alpha_j\beta_j}$ på følgende måde:

$$\begin{aligned} \varphi_{a_1b_1} = & \gamma_{\alpha_1\beta_1} K_O(\alpha_1, \beta_1) \delta_{\alpha_1}^{a_1} \delta_{\beta_1}^{b_1} - c \gamma_{\alpha_1\beta_1} (\gamma_{\alpha_2\beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2\beta_2}^0) \times \\ & \times \{ \delta_{\alpha_1 + \alpha_2}^{a_1} \delta_{\beta_1 + \beta_2}^{b_1} K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) + \\ & + \delta_{\alpha_1 + \alpha_2}^{a_1} \delta_{|\beta_1 + \beta_2|}^{b_1} K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, -\beta_2) + \\ & + \delta_{|\alpha_1 - \alpha_2|}^{a_1} \delta_{\beta_1 + \beta_2}^{b_1} K(\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1, \beta_2) + \\ & + \delta_{|\alpha_1 - \alpha_2|}^{a_1} \delta_{|\beta_1 - \beta_2|}^{b_1} K(\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1, -\beta_2) \} . \end{aligned} \quad (6.6.10)$$

Symbolet δ_{α}^{β} er Kronecker's delta, der antager værdien 1 for $\alpha = \beta$ og 0 for $\alpha \neq \beta$.

De to randbetingelser, der søges opfyldt ved hjælp af løsninger til $\Delta \Delta f = 0$, er

- a) Den samlede normalkraft er af en given størrelse.
- b) Flytningen V skal være periodisk. Dvs., der skal være sammenhæng i skallen.

Den samlede axiale kraft er givet ved

$$P = \int_0^{2\pi R} N_X dY = \frac{E t^2}{m} \int_0^{2\pi m} f'' d\eta \quad (6.6.11)$$

Bidraget fra det partikulære integral f_p findes af (6.6.6) til at være nul. For at opfylde (6.6.11) tilføjes bidraget

$$f_1 = \frac{1}{2} p^* Y^2 = \frac{P}{4\pi} \frac{1}{E t^2} Y^2 \quad (6.6.12)$$

til udtrykket for spændingsfunktionen. Det ses umiddelbart, at $\Delta \Delta f_1 = 0$ er opfyldt.

Herefter bestemmes størrelsen

$$\Delta V = \int_0^{2\pi R} V_Y dY = \frac{t q_0}{m} \int_0^{2\pi m} v' d\eta \quad (6.6.13)$$

ved integration, efter at (6.5.8) er indført, til

$$\Delta V = \frac{t}{m} \int_0^{2\pi m} \{f'' - v f'' + w - c w' (w' + 2w_0')\} d\eta \quad (6.6.14)$$

Ved at kombinere de hidtil opnåede resultater kan følgende hjælpestørrelse bestemmes

$$\begin{aligned} \Delta V_p &= \frac{t}{m} \int_0^{2\pi m} \{f_p'' - v f_p'' + w - c w' (w' + 2w_0')\} d\eta \\ &= -2\pi t \cdot \lambda^2 a_1^2 \varphi_{a_1 b_1} \cos(a_1 \zeta) \delta_{b_1}^0 \\ &\quad + 2\pi t \cdot \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \cdot \cos(\alpha_1 \zeta) \delta_{\beta_1}^0 - \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

$$- \pi t \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) \cos(\alpha_1 \zeta) \cos(\alpha_2 \zeta) \delta_{\beta_1}^{\beta_2} \beta_1 \beta_2 \mu^2 c$$

Konstanterne $\varphi_{a_1 b_1}$ kan indføres således, at ΔV_p alene udtrykkes ved flytningsparametrene. Den krævede kompatibilitetsbetingelse er da

$$\Delta V = \frac{t}{m} \int_0^{2m\pi} \{f_h'' - v f_h''\} d\eta + \Delta V_p = 0, \quad (6.6.16)$$

hvor f_h er en løsning til $\Delta \Delta f = 0$. Det har ikke vist sig muligt at bestemme en løsning, f_h , der overalt opfylder (6.6.16). Kompatibilitetsbetingelsen reduceres til

$$\int_0^L \Delta V dx = \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \Delta V d\zeta = 0. \quad (6.6.17)$$

Det er klart, at denne omformning nødvendiggør en kontrol af, at variationen af ΔV , der optræder i forbindelse med en fundet løsning, er passende beskeden.

Udskrives (6.6.17) fremkommer

$$\begin{aligned} & \frac{tL}{mn\pi} \int_0^{n\pi} \left(\int_0^{2m\pi} \{f_h'' - v f_h''\} d\eta \right) d\zeta + 2\pi tL \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_1}^0 \delta_{\beta_1}^0 - \\ & - \frac{1}{2} \pi tL c \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) (1 + \delta_{\alpha_1}^0) \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1}^{\beta_2} \beta_1^2 \mu^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.6.18)$$

Det ses, at (6.6.16) kan opfyldes, hvis f_h vælges som

$$f_h = \frac{1}{2} q^* x^2 + \frac{1}{2} p^* y^2, \quad (6.6.19)$$

hvor q^* kan bestemmes til

$$\begin{aligned} q^* &= v p^* - \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_1}^0 \delta_{\beta_1}^0 \\ &+ \frac{1}{4} \beta_1^2 \mu^2 (1 + \delta_{\alpha_1}^0) \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1}^{\beta_2} c. \end{aligned} \quad (6.6.20)$$

Udtrykket for spændingsfunktionen er da

$$f = \frac{1}{2} q^* x^2 + \frac{1}{2} p^* y^2 + f_p ,$$

hvor udtrykkene (6.6.9) og (6.6.20) kan indsættes.

For at bestemme den ydre belastnings arbejde må forlængelsen af cylinderen bestemmes. Dette gøres ved at integrere (6.5.6)

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{L}{Rn\pi} \int_0^{n\pi} \{f'' - \nu f'' - c w' (w' + 2w_0')\} d\zeta \\ &= \frac{L}{R} \left[p^* - \nu q^* - \nu \varphi_{a_1 b_1} \delta_{a_1}^0 \cos(b_1 \eta) \right. \\ &\quad \left. - c \frac{1}{4} \delta_{\alpha_1}^2 \lambda_{\alpha_1}^2 \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) \cos(\beta_1 \eta) \cos(\beta_2 \eta) \right]. \end{aligned} \quad (6.6.22)$$

Den ydre belastnings arbejde bestemmes ved

$$A_p = \int_0^{2\pi R} \bar{p} \Delta u dy = \frac{Et^3}{m} \int_0^{2\pi\pi} p^* \Delta u d\eta , \quad (6.6.23)$$

idet belastningen regnes jævnt fordelt langs randen. Udregnes (6.6.23) fremkommer

$$\begin{aligned} A_p &= 2\pi Et^3 \frac{L}{R} [p^* (p^* - \nu q^*) - \nu p^* \varphi_{a_1 b_1} \delta_{a_1}^0 \delta_{a_1}^0 - \\ &\quad - c p^* \frac{1}{4} \delta_{\alpha_1}^2 \lambda_{\alpha_1}^2 \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_2 \beta_2} + 2\gamma_{\alpha_2 \beta_2}^0) (1 + \delta_{\beta_1}^0) \delta_{\beta_1}^{\beta_2}]. \end{aligned} \quad (6.6.24)$$

Det ses af (6.6.10), at $\varphi_{a_1 b_1} \delta_{a_1}^0 \delta_{b_1}^0$ altid har værdien nul, hvorved (6.6.24) reduceres til

$$\begin{aligned} A_p &= 2\pi Et^3 \frac{L}{R} [p^* (p^* - \nu q^*) - \frac{1}{4} p^* c \lambda_{\alpha_1}^2 (1 + \delta_{\beta_1}^0) \times \\ &\quad \times \gamma_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma_{\alpha_1 \beta_1} + 2\gamma_{\alpha_1 \beta_1}^0)] \end{aligned} \quad (6.6.25)$$

Bidragene fra tøjningsenergien i den potentielle energi kan bestemmes ved (6.4.12), (6.4.13), (6.5.3-5), (6.6.1) og (6.6.9).

$$\begin{aligned}
 E_F &= \frac{1}{2} \frac{Et^3}{R^2} \int_A (f''f'' + f''f'' - 2vf''f'' + 2(1+v)f'f') dA \\
 &= \frac{1}{2} Et^3 \frac{L}{R} \frac{1}{mn\pi} \int_0^{n\pi} \left(\int_0^{2m\pi} (f''f'' + f''f'' - 2vf''f'' + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+v)f'f') d\eta \right) d\zeta \quad (6.6.26) \\
 &= Et^3 \frac{1}{2} \frac{L}{R} \pi [2q^{*2} + 2p^{*2} - 4vp^{*q^{*}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\varphi_{a_1 b_1})^2 (1 + \delta_{a_1}^0)(1 + \delta_{b_1}^0)(\lambda^2 a_1^2 + \mu^2 b_1^2)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_W &= \frac{1}{2} \frac{Et^3}{R^2} \int_A (w''w'' + w''w'' + 2vw''w'' + 2(1-v)w'w') dA \\
 &= \frac{1}{2} Et^3 \frac{L}{R} \frac{1}{mn\pi} \int_0^{n\pi} \left(\int_0^{2m\pi} (w''w'' + w''w'' + 2vw''w'' + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-v)w'w') d\eta \right) d\zeta \quad (6.6.27) \\
 &= Et^3 \frac{L}{R} \cdot \frac{\pi}{4} (\gamma_{\alpha_1 \beta_1})^2 (1 + \delta_{\beta_1}^0)(1 + \delta_{\alpha_1}^0)(\lambda^2 \alpha_1^2 + \mu^2 \beta_1^2)^2
 \end{aligned}$$

Det ses, at den potentielle energi nu kan udtrykkes alene ved parametrene i flytningsfeltet, idet parametrene i spændingsfunktionen bestemmes ved (6.6.9). I det følgende er (6.6.10) i midlertid ikke indsat i udtrykket for den potentielle energi

$$\pi_p = E_F + E_W - A_p, \quad (6.6.28)$$

da det fremkomne udtryk bliver særdeles kompliceret.

På grund af den dobbelte indicering af parametrene er det opstillede energiudtryk tungt at arbejde med i det følgende. På baggrund heraf gennemføres en omnummerering, således at (6.6.1) og (6.6.9) bliver til

$$w = N_{\alpha}^w \gamma_{\alpha} \quad (6.6.29)$$

$$f_p = N_i^F \varphi_i \quad (6.6.30)$$

idet små græske indices løber over antallet af formfunktioner, mens små latinske løber over de for spændingsfunktionen aktuelle værdier. Der summeres over gentagne indices. I forbindelse med omnummereringen indføres en række forkortelser, der er defineret nedenfor.

$$\begin{aligned} A_p^* &= A_p / \left(\frac{1}{2} Et^3 \pi \frac{L}{R} \right) \\ &= 4p^* (p^* - vq^*) + A_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\beta} + 2\gamma_{\beta}^0) p^* \\ &= 4p^* (p^* - vq^*) + (A_{\alpha}^G \gamma_{\alpha} + A_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}) p^* \end{aligned} \quad (6.6.31)$$

$$\begin{aligned} E_F^* &= E_F / \left(\frac{1}{2} Et^3 \pi \frac{L}{R} \right) \\ &= 2q^{*2} + 2p^{*2} - 4vp^*q^* + D_{ij}^F \varphi_i \varphi_j \end{aligned} \quad (6.6.32)$$

$$\begin{aligned} E_w^* &= E_w / \left(\frac{1}{2} Et^3 \pi \frac{L}{R} \right) \\ &= D_{\alpha\beta}^w \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \end{aligned} \quad (6.6.33)$$

$$\varphi_i = F_{i\alpha}^G \gamma_{\alpha} + F_{i\alpha\beta}^{GG} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \quad (6.6.34)$$

$$q^* = vp^* + Q_{\alpha}^G \gamma_{\alpha} + Q_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \quad (6.6.35)$$

6.7.1 Ligevægtsligninger hørende til den tilnærmede beregningsmetode for fast imperfektion.

I det foregående afsnit er opstillet udtryk for den potentielle energi for en imperfekt axialt belastet cylinder. Ligevægtstilstande bestemmes ved variationsprincippet Stationær Potentiel Energi. Det vil sige, at ligevægtsligningerne svarer til at kræve de afledede af den potentielle energi med hensyn til parametrene i flytningsfeltet lig med nul.

En dimensionsløs potentiel energi udtrykkes ved

$$\begin{aligned}\pi_p^* &= E_F^* + E_W^* - A_p^* \\ &= 2q^{*2} - 2p^{*2} + D_{ij}^F \varphi_i \varphi_j + D_{\alpha\beta}^W \gamma_\alpha \gamma_\beta - p^* A_\alpha^G \gamma_\alpha - p^* A_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_\alpha \gamma_\beta,\end{aligned}\quad (6.7.1.1)$$

hvor q^* og φ_i udtrykkes ved γ_α gennem (6.6.34) og (6.6.35). De søgte ligevægtsligninger er

$$\frac{\partial \pi_p^*}{\partial \gamma_\alpha} = 4q^* \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\alpha} + 2D_{ij}^F \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \gamma_\alpha} + 2D_{\alpha\beta}^W \gamma_\beta - p^* A_\alpha^G - 2p^* A_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_\beta = 0.\quad (6.7.1.2)$$

De afledede af q^* og φ_j med hensyn til γ_α er

$$\frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\alpha} = Q_\alpha^G + 2Q_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_\beta \quad (6.7.1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \gamma_\alpha} = F_{i\alpha}^G + 2F_{i\alpha\beta}^{GG} \gamma_\beta. \quad (6.7.1.4)$$

Ved omformning af (6.7.1.2) fremkommer

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_p^*}{\partial \gamma_\alpha} &= 4(Q_\alpha^G + Q_{\zeta\delta}^{GG} \gamma_\delta) \gamma_\zeta \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\alpha} + 2D_{ij}^F \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \gamma_\alpha} + 2D_{\alpha\beta}^W \gamma_\beta + \\ &+ p^* (4v \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\alpha} - A_\alpha^G - 2A_{\alpha\beta}^{GG} \gamma_\beta) \\ &= v_\alpha^1 + v_\alpha^2 p^*.\end{aligned}\quad (6.7.1.5)$$

Ligevægtsligningerne kan løses ved en Newton - Raphson metode, der har til formål at bestemme en følge af forbedringer til en tilnærmelse $\bar{\gamma}_\alpha$ til løsningen. Et iterationstrin kan beskrives ved at kræve betingelsen $\frac{\partial \pi^*}{\partial \gamma_\alpha} \bigg|_{\gamma_\beta + \Delta \gamma_\beta} = 0$ opfyldt. Venstresiden udvikles i en Taylorrække ud fra $\bar{\gamma}_\beta$, dvs.

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \gamma_\alpha} \bigg|_{\gamma_\beta + \Delta \gamma_\beta} \approx \frac{\partial \pi^*}{\partial \gamma_\alpha} + \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} \Delta \gamma_\beta = 0. \quad (6.7.1.6)$$

Omkring grænselaste er belastningsparameteren p^* ikke velegnet til at styre en deformationstilstand. De numeriske eksempler har vist, at betingelsen

$$\gamma_\alpha \gamma_\alpha = A^2 \quad (6.7.1.7)$$

i den lineariserede udgave

$$2\bar{\gamma}_\alpha \Delta \gamma_\alpha = A^2 - \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\alpha \quad (6.7.1.8)$$

er velegnet til dette formål.

Betingelsen (6.7.1.7) knytter sig til den maksimale flytning og til integralet af tværflytningens kvadrat over skalfladen, så der er en nøje sammenhæng mellem værdien af A og deformationsgraden.

Benyttes (6.7.1.8) sammen med (6.7.1.6) bliver det bestemmende ligningssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} - V_\alpha^1 & \Delta \gamma_\beta \\ 2\bar{\gamma}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \gamma_\beta \\ p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_\beta^2 \\ A^2 - \bar{\gamma}_\beta \bar{\gamma}_\beta \end{bmatrix} \quad (6.7.1.9)$$

Den anden afledede af den potentielle energi findes ved at differentiere ligevægtsligningerne (6.7.2) med hensyn til γ_β .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} = & 4q^* \frac{\partial^2 q^*}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} + 4 \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\alpha} \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_\beta} + 2D_{ij}^F \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} + \\ & + 2D_{ij}^F \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma_\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \gamma_\alpha} + 2D_{\alpha\beta}^W - 2p^* A_{\alpha\beta}^G \end{aligned} \quad (6.7.1.10)$$

De i udtrykket (6.7.1.10) anvendt anden afledede bestemmes af (6.7.1.3) og (6.7.1.4).

$$\frac{\partial^2 q^*}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} = 2Q_{\alpha\beta}^{GG} \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} = 2F_{i\alpha\beta}^{GG} \quad (6.7.1.11+12)$$

6.7.2 Numeriske eksempler på beregning med fast imperfektion

Ved udvælgelsen af funktioner, der medtages i det benyttede flytningsfelt, må bestræbelserne naturligvis gå i retning af at medtage de mest betydningsfulde led.

De foldningsmønstre, der er knyttet til den kritiske last for en perfekt cylinder tiltrækker sig naturligt opmærksomhed. De egenfunktioner, der bestemmes i [1] er trigonometriske funktioner i de variable x og y . Dvs. de dannes af et antal bølger i ringretningen og et antal bølger i frembringerretningen.

For nærmere analyse af disse funktioners egenskaber vises nedenfor resultater fra beregninger, hvor flytningsfeltet og imperfektionen er valgt som bølger i frembringer- og ringretning.

På de to nedenstående figurer er vist belastningsparameteren p^* mod flytningsniveauet $\sqrt{z_i z_i}$.

Med den anvendte normering er $\cos(x)$ netop den aksesymmetriske egenfunktion, der hører til den laveste egenverdi ($p_{c1}^* = 1/\sqrt{3}$). Derfor har funktion nr. 1 selv for stort flytningsniveau en værdi af p^* , der praktisk talt er identisk med p_{c1}^* . For de tre præsenterede eksempler gælder, at p^* og den gennemsnitlige sammentrykning vokser monotont med $\sqrt{z_i z_i}$, ligesom det er tilfældet for alle gennemregnede eksempler af denne type.

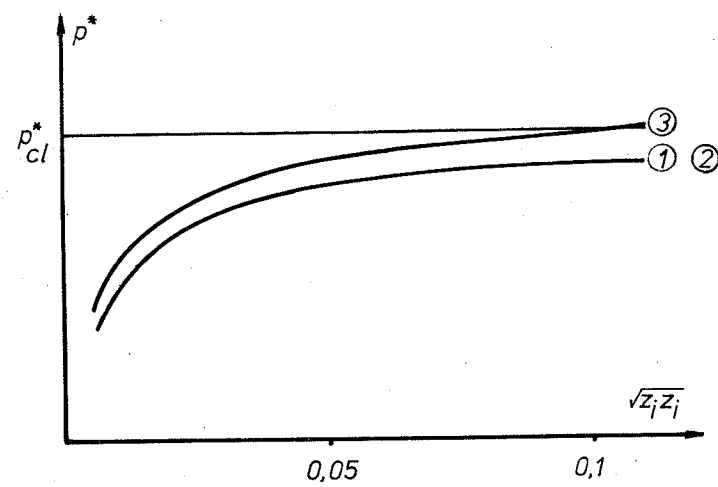


Fig. 6.7.2.1

1. $w_0 = 0.01 \times \cos(x)$ $W = z_1 + z_2 \cos(x)$
2. $w_0 = 0.01 \times \cos(x)\cos(y)$ $W = z_1 + z_2 \cos(x)\cos(y)$
3. $w_0 = 0.01 \times \cos(x)\cos(y/2)$ $W = z_1 + z_2 \cos(x)\cos(y/2)$

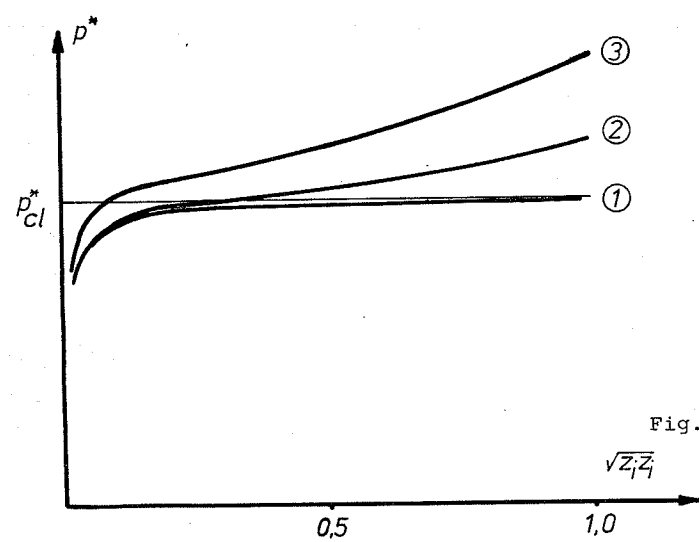


Fig. 6.7.2.2

Det velkendte fænomen, at der opstår gennemslag, når en cirkulær cylinder trykkes sammen, kan ikke reproducere med en enkelt af disse funktioner. Forklaringen herpå synes at være, at Flügge's klassiske løsning beskriver forholdene for en perfekt cylinder underkastet små flytninger. For at finde koordinatfunktioner, der kan beskrive situationen, hvor der optræder større flytninger, er det - som altid - hensigtsmæssigt, at betragte udseendet af de foldningsmønstre, der rent faktisk optræder ved forsøg. I [2] beskrives resultater fra en omfattende forsøgsrække udført ved Institut für Flugzeugbau, Braunschweig. Fremstillingen er illustreret med et utal af fotos af foldede cylindre. Et enkelt typisk eksempel er vist nedenfor.

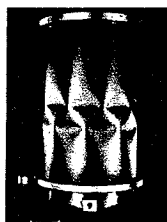


Fig. 6.7.2.3

Det er karakteristisk for de i [2] viste cylindre, at bulerne grupperer sig i ringe, der ligger forskudt i forhold til hinanden. Endvidere går bulerne indad mod cylinderaksen. Der opstår ved forsøgene en række buler for meget korte skaller. Ellers optræder som regel to. Det er imidlertid muligt at ændre foldningsmønsteret til at indeholde tre bulerækker ved ganske små ydre påvirkninger. Dette forhold antyder, at det meste af skalfladen befinder sig i en situation, hvor der er meget lille stivhed tilbage, og at understøtningernes indflydelse bevirker, at foldningen finder sted omtrent midt i skallen.

Disse overvejelser bevirker, at en beregning gennemføres med felterne

$$w = Z_1 + Z_2 \sin^2(\lambda x + \mu y) \sin^2(\lambda x - \mu y) \quad (6.7.2.1)$$

$$w_0 = z_0 \sin^2(\lambda x + \mu y) \sin^2(\lambda x - \mu y) \quad (6.7.2.2)$$

der har egenskaberne

1. knudelinierne er skruelinier på cylinderen,
2. buerne vender indad.

På figuren er vist resultater for gennemregnet tilfælde
($\lambda = 0.289$, $\mu = 0.225$, $\nu = 0$).

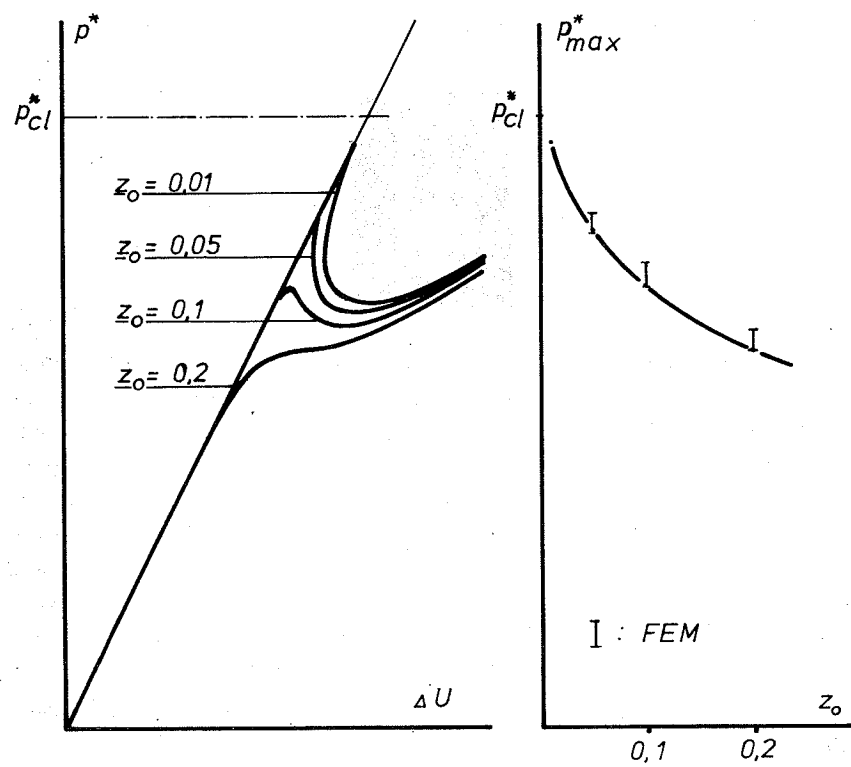


Fig. 6.7.2.4

Fig. 6.7.2.5

Det ses, at det er muligt at give en kvalitativt korrekt beskrivelse af foldningsforholdene for cylinderen med i realiteten en flytningsfunktion. For at vurdere resultaternes kvantitative værdi er der gennemført en elementmetodeberegning af en cylinder med samme imperfektion. Resultaterne fra de to metoder stemmer udmærket overens.

For at analysere betydningen af det benyttede flytningsfelt gennemføres kontrolberegninger med flytningsfelterne.

$$w = Z_1 + Z_2 \cos(4\lambda x) + Z_3 \cos(4\mu y) + Z_4 \cos(2\lambda x) \cos(2\mu y) \quad (6.7.2.3)$$

$$w = Z_1 + Z_2 \cos(4\mu y) + Z_3 \cos(4\lambda x) + Z_4 \cos(2\lambda x) \cos(2\mu y) \\ + Z_5 \cos(8\mu y) + Z_6 \cos(8\lambda x) + Z_7 \cos(4\lambda x) \cos(4\mu y) \\ + Z_8 \cos(6\lambda x) \cos(2\mu y) + Z_9 \cos(2\lambda x) \cos(6\mu y) \quad (6.7.2.4)$$

Flytningsfeltet (6.7.2.1) kan udtrykkes ved (6.7.2.3) eller (6.7.2.4) samt passende lineære relationer mellem flytningsparametrene Z_i . Nedenfor er vist værdier for "spidsværdien" på arbejdskurven. Imperfektionen er givet ved (6.7.2.2) med $Z_0 = 0.05$. De øvrige parametre er $\lambda = 0.3$, $\mu = 0.15$ og $\nu = 0$.

Flytningsfelt	P_{\max}^*
(6.7.2.1)	-.5242
(6.7.2.3)	-.5232
(6.7.2.4)	-.5225

Beregningerne viser desuden, at de koordinatfunktioner, der er aktive, i alt væsentligt er dem, der benyttes til opbygning af imperfektionen samt det konstante flytningsbidrag. Den konstatering, at aktuelle flytnings- og imperfektionsfelter synes at

bestå af de samme bestanddele, danner udgangspunkt for de sidste to afsnit i dette kapitel.

Erfaringer med beregning med et flytningsfelt, der i forhold til (6.7.2.1) er udvidet ved, at led med dobbelt så store bølgetal medtages, og med imperfektionen (6.7.2.2), viser, at grænselasten praktisk talt ikke ændres, mens mindsteværdien af p^* efter gennemslaget formindskes som følge af at flytningsfeltet er i stand til at beskrive de "skarpkantede" buer bedre.

6.8.1 Beregning med affine imperfektioner og flytninger.

Da det kan konstateres, at indflydelsen på bæreevnen i høj grad er betinget af imperfektionens udseende, er det i en indledende designfase nødvendigt at afgøre

hvilke imperfektionsformer og
hvilke imperfektionsamplituder,

der skal analyseres før konstruktionen udføres. De valg, der i denne forbindelse foretages, er mere eller mindre vilkårlige, da den færdige konstruktionsgeometri er ukendt indtil udførelsen har fundet sted.

Valget af imperfektionsamplitude vil være påvirket af de tolerancer, der kan kræves ved fremstillingsprocessen, mens valget af form er sværere at foretage på et blot nogenlunde rationelt grundlag.

I det følgende afsnit præsenteres resultater, der er opnået under forudsætning af at imperfektions- og flytningsfelt er affine, samt at flytnings- og imperfektionsniveau er kendt.

Antagelsen er motiveret af erfaringer gjort med den i afsnit 7 benyttede metode, samt forfatterens intuitive fornemmelse af, at imperfektioner, der ligner det ved gennemslag forekommende flytningsfelt, må være farlige.

Rent praktisk foretages beregningen helt analogt til den i afsnit 7 beskrevne, blot med den ændring, at imperfektionskoefficienterne γ_α^0 opdateres efter hvert iterationstrin, således at γ_α og γ_α^0 er affine, samt at $\gamma_\alpha^0 \gamma_\alpha^0$ har en på forhånd foreskrevet størrelse, B^2 . Da γ_α^0 løbende ændres, må de matricer, der afhænger af imperfektionerne, dvs. A_α^G , $F_{i\alpha}^G$ og Q_α^G udregnes i hvert trin.

Størrelsen B beskriver rent faktisk imperfektionsniveauet, da B er den største mulige amplitude af en koordinatfunktion, og da den gennemsnitlige imperfektion W_{gsn}^0 kan udtrykkes ved

$$(W_{gsn}^0)^2 = \frac{\int_0^L dx \int_0^{2\pi R} dY \left(\frac{W^0}{t}\right)^2}{\int_0^L dx \int_0^{2\pi R} dY \cdot 1} = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha_1 \beta_1}^0)^2 (1 + \delta_{\alpha_1}^0) (1 + \delta_{\beta_1}^0) \quad (6.8.2.1)$$

6.8.2 Numeriske eksempler på beregning med affine imperfektioner og flytninger.

Som udgangspunkt vælges flytningsfeltet

$$w = z_1 + z_2 \cos 2\lambda x + z_3 \cos 2\mu y + z_4 \cos \lambda x \cos \mu y \quad (6.8.2.1)$$

og imperfektionen

$$w_0 = z_1^0 + z_2^0 \cos 2\lambda x + z_3^0 \cos 2\mu y + z_4^0 \cos \lambda x \cos \mu y. \quad (6.8.2.2)$$

På figuren nedenfor er anført resultater for beregninger med forudsætningerne

$$z_i^0 = \alpha z_i \quad (\text{affinitet}) \quad (6.8.2.3)$$

$$z_i^0 z_i^0 = z_0^2 \quad (\text{imperfektionsniveau}) \quad (6.8.2.4)$$

Til sammenligning er endvidere med punkterede kurver optegnet resultater for beregninger med en fast imperfektion.

$$z_2^0 = z_0, \quad z_1^0 = z_3 = z_4 = 0 \quad (6.8.2.5)$$

Imperfektionen svarer til et axesymmetrisk foldningsmønster, der optræder i forbindelse med den mindste klassiske kritiske værdi.

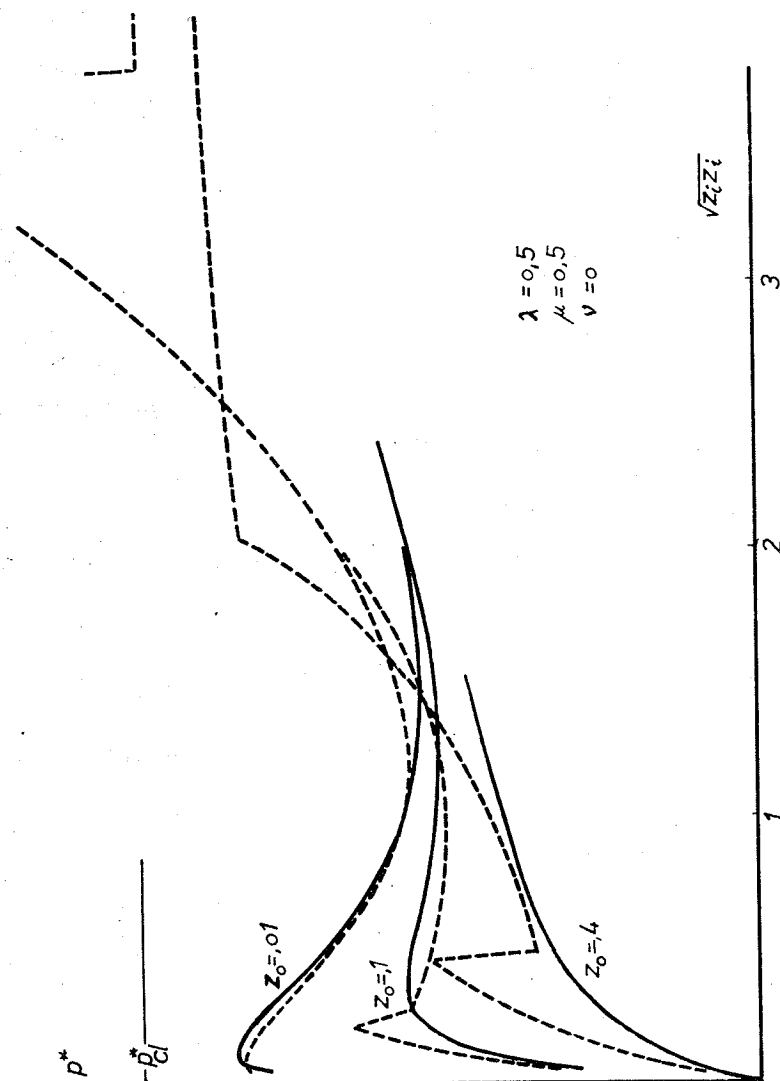


Fig. 6.8.2.1

På figuren er resultater for $(\lambda, \mu) = (0.5, 0.5)$ med felterne (6.8.2.1) og (6.8.2.2) givet som kurver. For at undersøge om mere raffinerede flytnings- og imperfektionsfelter fører til mærkbart ændrede resultater, gennemføres regningerne med

$$\begin{aligned}
 w = & Z_1 + Z_2 \cos(2\lambda x) + Z_3 \cos(2\lambda x)\cos(2\mu y) + Z_4 \cos(2\mu y) \\
 & + Z_5 \cos(\lambda x)\cos(\mu y) + Z_6 \cos(\lambda x) + Z_7 \cos(\mu y) \\
 & + Z_8 \cos(4\lambda x) + Z_9 \cos(4\mu y) + Z_{10} \cos(4\lambda x)\cos(4\mu y) \\
 & + Z_{11} \cos(4\lambda x)\cos(2\mu y) + Z_{12} \cos(2\lambda x)\cos(4\mu y)
 \end{aligned}
 \tag{6.8.2.6}$$

Imperfektionen gives ved et analogt udtryk. Ved at vælge $(\lambda, \mu) = (0.5, 0.5)$ er det i første omgang benyttede flytningsfelt udvidet med koordinatfunktioner, der bølger såvel hurtigere som langsommere. De numeriske resultater var identiske med dem, der bestemtes med fire koordinatfunktioner.

Beregninger med $(\lambda, \mu) = (0.25, 0.25)$ giver resultater identiske med de på figuren viste, mens beregning med $(\lambda, \mu) = (1.0, 1.0)$ giver at alene den aksesymmetriske mode (hørende til Z_6) træder i funktion. Dette skyldes, at det ikke nu er muligt at danne en linearkombination svarende til (6.8.2.1) med $(\lambda, \mu) = (0.5, 0.5)$. Kurver hørende til fast aksesymmetrisk imperfektion er punkteret.

Diverse beregninger foretaget med forskellige kombinationer af (λ, μ) viser, at den kombination, der giver de laveste "grænseværdier" ligger tæt ved $(0.5, 0.5)$.

Ved at beregne størrelsen

$$\Delta V = \int_0^{2\pi R} v_y dY \tag{6.8.2.7}$$

i tætliggende punkter langs randen konstateres det, at ΔV er nul overalt, og at der dermed er sikret sammenhæng overalt i skallen.

På næste figur er vist resultater for en beregning, hvor (λ, μ) er sat til $(0.5, 0.25)$.

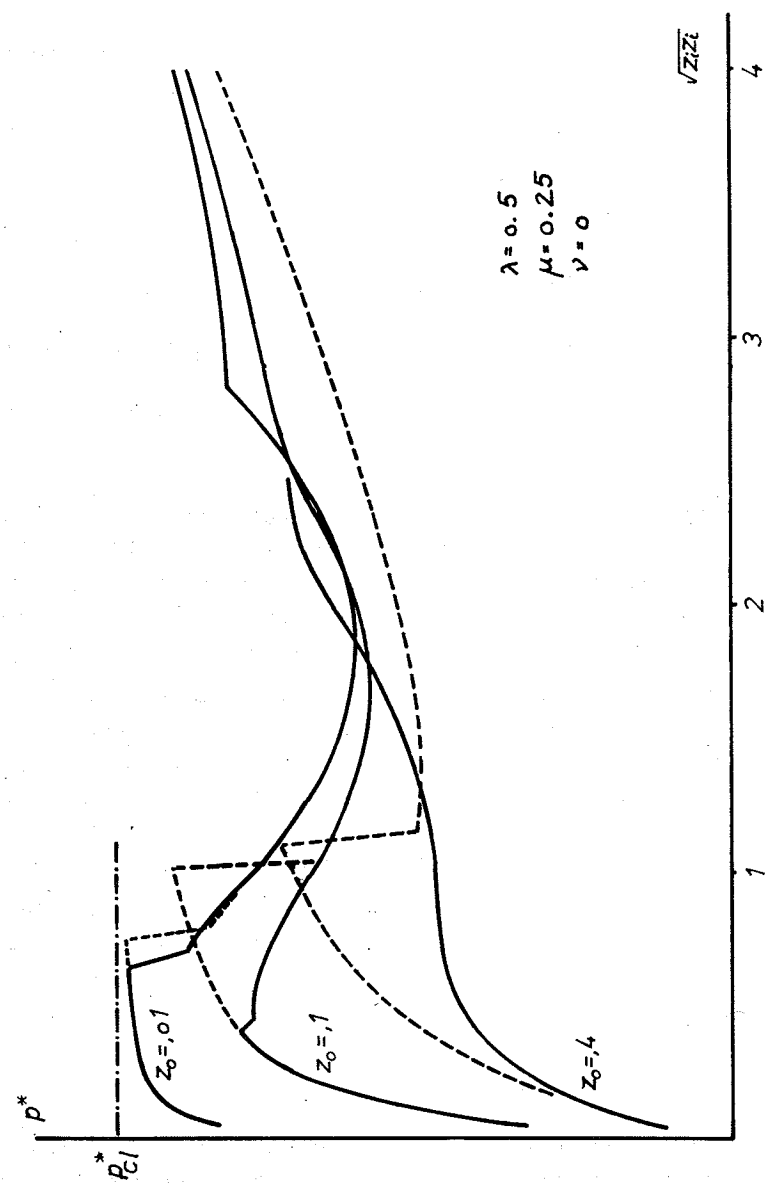


Fig. 6.8.2.2

6.9.1 Beregning med flytnings- og imperfektionsniveau som primære parametre.

I dette afsnit analyseres problemet

hvilken imperfektion er den farligste for givet flytnings- og imperfektionsniveau?

uden den forenklende affinitetsantagelse fra afsnit 6.8. Den søgte løsning til problemet opfylder betingelserne

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \gamma_\alpha} = 0 \quad (\text{ligevægtsligningerne opfyldt}) \quad (6.9.1.1)$$

$$p^* = \min\{p^* | \gamma_\alpha \gamma_\alpha = A^2, \gamma_\alpha^O \gamma_\alpha^O = B^2\} \quad (6.9.1.2)$$

$$\gamma_\alpha \gamma_\alpha = A^2 \quad (\text{flytningsniveau}) \quad (6.9.1.3)$$

$$\gamma_\alpha^O \gamma_\alpha^O = B^2 \quad (\text{imperfektionsniveau}) \quad (6.9.1.4)$$

Betingelsen (6.9.1.2) indebærer specielt, at p^* er stationær overfor tilladelige variationer i γ_α^O . Denne egenskab kan udtrykkes ved, at

$$\phi = p^* + \Lambda(\gamma_\alpha^O \gamma_\alpha^O - B^2) \quad (6.9.1.5)$$

er stationær overfor variationer i γ_α^O og Lagrange-multiplikatoren Λ .

Det er i afsnit 7.1 vist, at ligevægtsbetingelsen (6.9.1.1) kan skrives på formen

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \gamma_\alpha} = V_\alpha^1 + p^* V_\alpha^2 = 0,$$

hvor V_α^1 og V_α^2 afhænger af γ_α og γ_α^O . Det er oplagt, at V_α^2 ikke kan være en nulvektor, idet ligevægtsbetingelsen da ikke ville afhænge af den ydre belastning.

Identiteten

$$V_{\alpha}^2 (V_{\alpha}^1 + p^* V_{\alpha}^2) = 0 \quad (6.9.1.7)$$

muliggør, at p^* kan udtrykkes ved γ_{α} og γ_{α}^0 på følgende måde

$$p^* = - \frac{V_{\alpha}^1 V_{\alpha}^2}{V_{\beta}^2 V_{\beta}^2} \quad (6.9.1.8)$$

De to Eulerligninger, der sikrer, at ϕ er stationær får følgende udseende

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{\alpha}^0} &= - \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha}^0} \left\{ \frac{V_{\zeta}^1 V_{\zeta}^2}{V_{\eta}^2 V_{\eta}^2} \right\} + 2 \Lambda \gamma_{\alpha}^0 \\ &= - \frac{1}{(V_{\eta}^2 V_{\eta}^2)} \left\{ \frac{\partial V_{\zeta}^1}{\partial \gamma_{\alpha}^0} V_{\zeta}^2 + V_{\zeta}^1 \frac{\partial V_{\zeta}^2}{\partial \gamma_{\alpha}^0} \right\} + \frac{2 V_{\zeta}^1 V_{\zeta}^2}{(V_{\eta}^2 V_{\eta}^2)^2} V_{\delta}^2 \frac{\partial V_{\delta}^2}{\partial \gamma_{\alpha}^0} \\ &\quad + 2 \Lambda \gamma_{\alpha}^0 = 0 \end{aligned} \quad (6.9.1.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} = \gamma_{\zeta}^0 \gamma_{\zeta}^0 - B = 0 \quad (6.9.1.10)$$

Den numeriske løsning af problemet foretages ved iteration efter følgende opskrift

1. skøn γ_{α}^0
2. bestem γ_{α} og p^* ved iteration som angivet i afsnit 7, hvorved ligevægtsbetingelsen er opfyldt.
3. bestem nye værdier for γ_{α}^0 og Λ .
4. fortsæt fra trin 2.

De erfaringer, der er indhøstet i forbindelse med de numeriske eksempler, antyder at bestemmelsen af nye værdier af γ_{α}^0 og Λ må foretages med nogen behændighed. Nedenfor skitseres den metode, der er anvendt i forbindelse med de i næste afsnit præ-senterede numeriske eksempler.

Den værdi af p^* , der fremkommer fra trin 2. sammenlignes med den numerisk set mindste værdi, der hidtil er bestemt. Hvis den nye værdi af p^* er den numerisk set mindste, bestemmes skøn for tilvækster i γ_α^0 og Λ ved at løse en lineariseret udgave af ligningerne (6.9.1.9) og (6.9.1.10), dvs.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_\alpha^0 \partial \gamma_\beta^0} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_\alpha^0 \partial \Lambda} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Lambda \partial \gamma_\beta^0} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Lambda^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \gamma_\beta^0 \\ \Delta \Lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_\alpha^0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \end{bmatrix}$$

Da der i nærheden af det søgte punkt ofte optræder temmelig store værdier af $\Delta \gamma_\beta^0$, er det hensigtsmæssigt at foretage en normering af $\Delta \gamma_\beta^0$, således at værdien af $\Delta \gamma_\beta^0 \Delta \gamma_\beta^0$ ikke overstiger en vis del af B.

Hvis den værdi af p^* , der er bestemt efter trin 2. ikke er den numerisk set mindste bestemmes en ny prøveværdi af γ_α^0 ved

$$\gamma_\beta^0 = \gamma_\alpha^0|_{\min} + (\gamma_\alpha^0|_{\max} - \gamma_\alpha^0|_{\min}) \cdot \omega,$$

hvor $\gamma_\alpha^0|_{\min}$ beskriver de imperfektioner, der har givet den hidtil numerisk set mindste værdi af p^* , mens $\gamma_\alpha^0|_{\max}$ er de imperfektioner, der hører til den af de to værdier af p^* , den hidtil næstmindste og den, der er fremkommet efter trin 2., der numerisk set er størst. Ved de numeriske beregninger er anvendt $\omega = 0.5$.

[1]: Flügge, W. Statik und Dynamik der Schalen.

Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg. 1957

[2]: Esslinger, M. & Geier, B. Postbuckling Behavior of Structures, Springer - Verlag, 1975

6.9.2 Numeriske eksempler på beregning med frie flytnings- og imperfektionsfelter.

Som udgangspunkt for beregningerne vælges

$$w = Z_1 + Z_2 \cos 2\lambda x + Z_3 \cos 2\mu y + Z_4 \cos \lambda x \cos \mu y \quad (6.9.2.1)$$

for flytningsfeltet og

$$w_0 = Z_2^0 \cos 2\lambda x + Z_3^0 \cos 2\mu y + Z_4^0 \cos \lambda x \cos \mu y \quad (6.9.2.2)$$

for imperfektionen. Der er ikke medtaget et konstant led i imperfektionen, således som det blev gjort i (6.8.2.2). Det skyldes, at energiudtrykket indeholder den første afledede af imperfektionen, se (6.4.13 & 14) og (6.5.6 - 8). En konstant i imperfektionsfeltet vil således ikke spille nogen aktiv rolle ved beregningen.

På figuren er vist sammenhørende værdier af $p^*|_{\min}$ og flytningsniveauet $\sqrt{Z_1 Z_1^0}$ for $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.5$ og $\nu = 0$. De analyserede imperfektionsniveauer er anført på kurverne. Beregningerne er foretaget ved, at den i afsnit 6.9.1 beskrevne proces udføres for et lille flytningsniveau. Herefter er løsningen til dette problem benyttet som udgangspunkt for en ny beregning med et lidt større flytningsniveau. Udgangstilstanden er tilfældigt sat til at alle koordinatfunktioner har samme vægt. Til sammenligning er endvidere med kryds vist resultater stammende fra beregninger for $\sqrt{Z_1^0 Z_1^0} = 0.1$ med felterne

$$\begin{aligned} w = & Z_1 + Z_2 \cos 2\lambda x + Z_3 \cos 2\lambda x \cos 2\mu y + Z_4 \cos 2\mu y \\ & + Z_5 \cos \lambda x \cos \mu y + Z_6 \cos \lambda x + Z_7 \cos \mu y + Z_8 \cos 4\lambda x \\ & + Z_9 \cos 4\mu y + Z_{10} \cos 4\lambda x \cos 4\mu y + Z_{11} \cos 4\lambda x \cos 2\mu y \\ & + Z_{12} \cos 2\lambda x \cos 4\mu y \end{aligned} \quad (6.9.2.3)$$

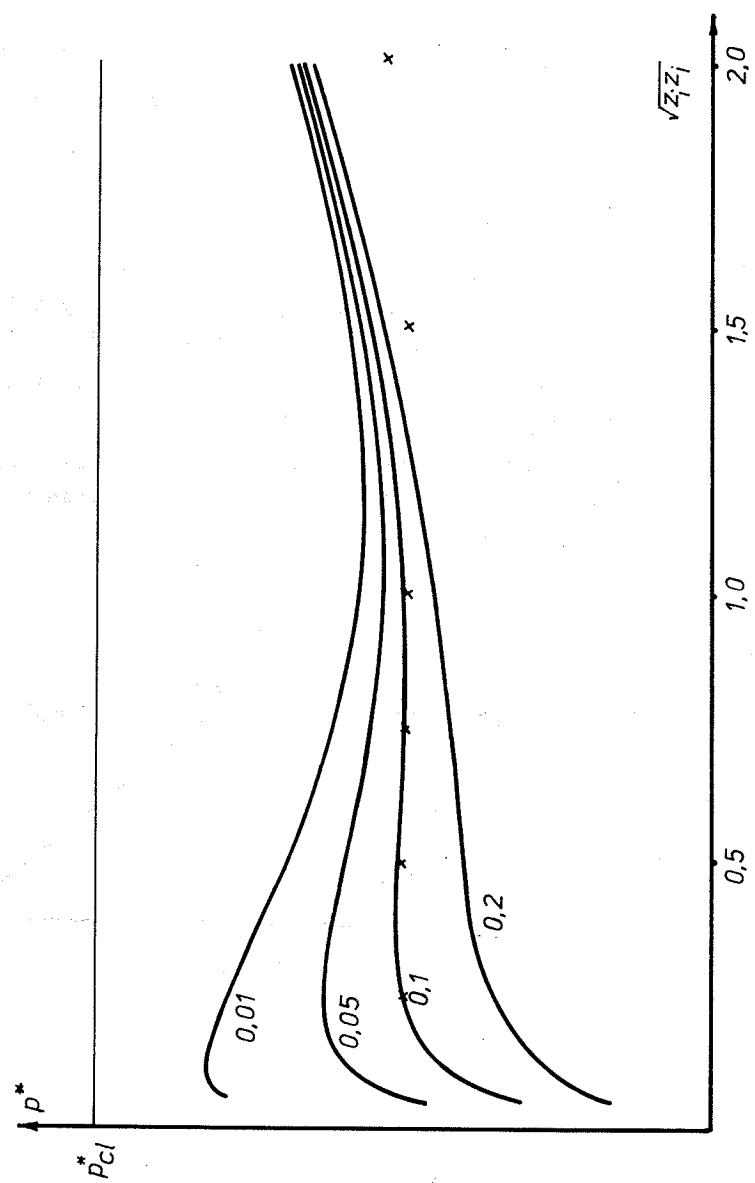


Fig. 6.9.2.1

$$\begin{aligned}
w_0 = & z_2^0 \cos \lambda x + z_3^0 \cos 2\lambda x \cos 2\mu y + z_4^0 \cos 2\mu y \\
& + z_5^0 \cos \lambda x \cos \mu y + z_6^0 \cos \lambda x + z_7^0 \cos \mu y + z_8^0 \cos 4\lambda x \\
& + z_9^0 \cos 4\mu y + z_{10}^0 \cos 4\lambda x \cos 4\mu y + z_{11}^0 \cos 4\lambda x \cos 2\mu y \\
& + z_{12}^0 \cos 2\lambda x \cos 4\mu y
\end{aligned}$$

Det ses, at der praktisk talt ikke kan konstateres nogen forskel på de to beregninger for flytningsniveauerne op til og med 1.0. Herefter vokser $p^*|_{\min}$ langsomt med det fine felt. Dette forhold kan forklares ved, at felterne (6.9.2.3 + 4) kan beskrive en mere avanceret deformationstilstand end (6.9.2.1 + 2).

For yderligere illustration af de opnåede resultater er nedenfor vist såvel flytnings- samt imperfektionsløsninger i udsnit af en udfoldet cylinder.

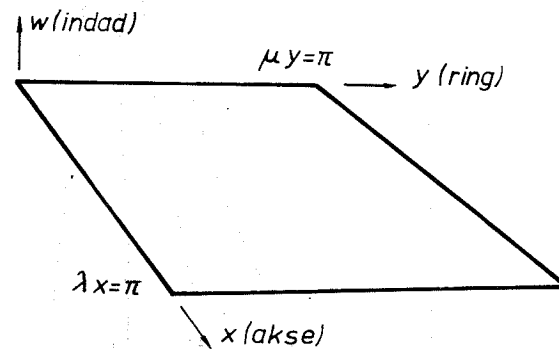
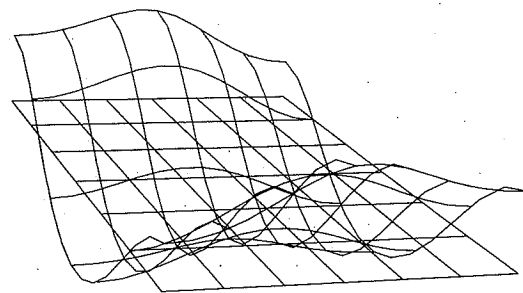
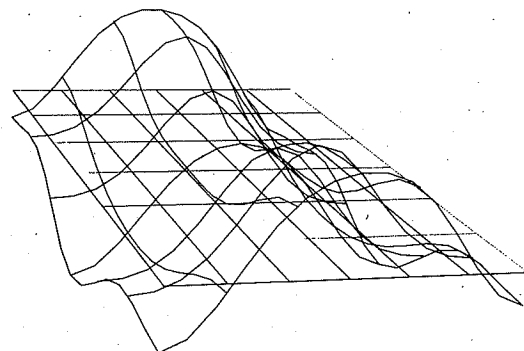


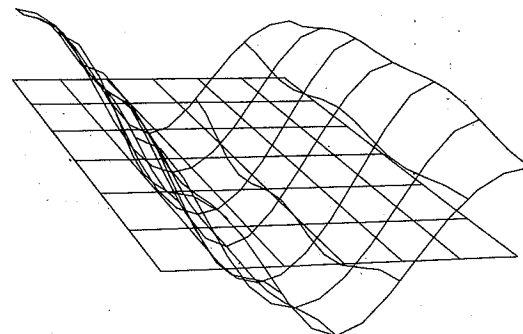
Fig. 6.9.2.2



FORM OF IMPERFECTION $Z_0=.1$ $Z=.75$ $L,M=.5,.5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$

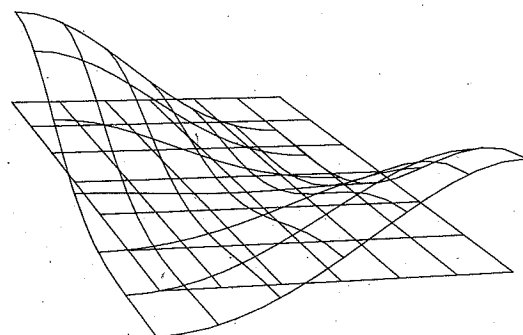


FORM OF IMPERFECTION ON $Z_0=.1$ $Z=1.5$ $L,M=.5,.5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$

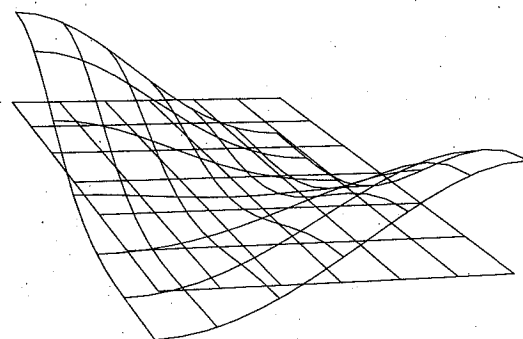


FORM OF IMPERFECTION $Z_0=.1$ $Z=2.00$ $L,M=.5,.5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$

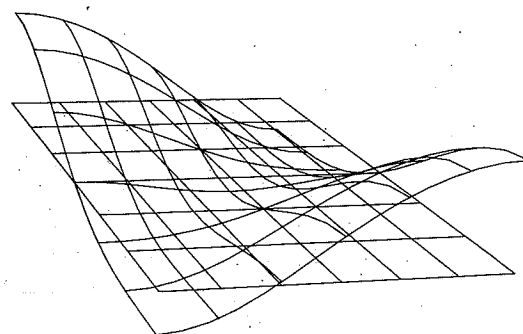
Fig. 6.9.2.3 - 5



FORM AF FLYTNINGSFELT $Z_0=1$ $Z=0.75$ $L,M=5,5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$



FORM AF FLYTNINGSFELT $Z_0=1$ $Z=0.50$ $L,M=5,5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$



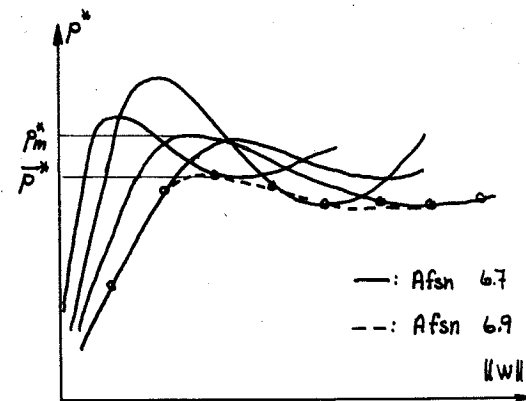
FORM AF FLYTNINGSFELT $Z_0=1$ $Z=2.00$ $L,M=5,5$ 12 MODES
 $A=(10,-4,5)$ $T,Z=-10,10$

Fig. 6.9.2.6 - 8

Af illustrationerne fremgår det, at formen af flytningsfeltet ikke ændrer karakter når flytningsniveauet forøges fra 0.5 til 2.0. Derimod ændrer den farligste imperfektion udseende. For $\sqrt{Z_1 Z_i} = 0.5$ er den i hovedsagen bestående af bølger i frembringerretningen. For $\sqrt{Z_1 Z_i} = 1.5$ består den af næsten lige store bølger i akse- og ringretning, mens bølgerne i ringretningen dominerer for $\sqrt{Z_1 Z_i} = 2.0$. Da de tilhørende værdier af p^*_{\min} ikke adskiller sig særlig meget fra hverandre må alle tre imperfektionstyper i en konkret situation være kandidater til en nøjere analyse.

6.10 Konsekvent bestemmelse af bæreevne ved anvendelse af matematisk programmering.

Metoden, der er beskrevet i foregående afsnit, leverer i de tilfælde, hvor der optræder et maximum på den bestemte kurve, en værdi af bæreevnen, der er en nedreværdi for de bæreevner, der kan bestemmes udfra de valgte flytnings- og imperfektionsfelter. Denne egenskab illustreres på nedenstående figur.

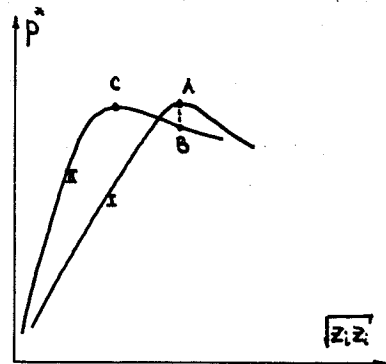


Hvis forløbet af nedreværdikurven fører til en uacceptabel lav værdi for \bar{p}^* , kan den reelt lavest opnåelige bæreevne p_{\min}^* søges bestemt efter nedenstående fremgangsmåde.

Metoden består i sin enkleste form i, at der skønnes et imperfektionsfelt, hvorefter maximal bæreevnen bestemmes som beskrevet i afsnit 6.7. Herefter ændres imperfektionsmønsteret i overensstemmelse med antagelsen om et givet imperfektionsniveau og den benyttede minimeringsalgoritme, hvorefter maximalbæreevnen atter bestemmes. Hvis den nu fundne bæreevne er mindre end den første, fortsættes iterationen ud fra det nye imperfektionsfelt. Iterationen fortsættes indtil en stationær værdi for maximalbæreevnen er fundet.

Metoden kan modificeres, så den medfører en noget mindre numerisk indsats. Man begynder som før med et udgangsimperfektionsfelt,

for hvilket den tilhørende maximalbæreevne bestemmes.



Dette punkt er A på figuren. Imperfektionsfeltet ændres nu i overensstemmelse med den valgte strategi (arbejdskurve II). Nu bestemmes det punkt, B, på kurve II, der har samme flytningsamplitude, $\sqrt{z_i z_i}$ som A. Bestemmelse af p i et nabopunkt til B afgør om maximalpunktet C skal søges "til højre" eller "til venstre" for B.

Da en funktionsevaluering består i løsning af et ikke-lineært ligningssystem udfra en tilnærmet løsning, må optimeringsstrategien vælges med omhu. Det vil endvidere være nødvendigt at bestemme nødvendige afledede af funktionen rent numerisk.

I litteraturen [1], [2] synes to ikke-lineære minimeringsalgoritmer på positiv måde at skulle sig ud fra de andre. Den ene er Powell's konjugerede gradientmetode, der på trods af navnet alene benytter funktionsværdien. Metoden har den egenskab, at minimere en kvadratisk funktion i et konvekst område i et endeligt antal trin. Den anden metode er DFP-metoden (Davidson-Fletcher-Powell). Denne metode kræver kendskab til første afledede. Metoden består i, at gunstige søgeretninger i variabelrummet vælges udfra en tilnærmet invers Hessisk matrix ($\tilde{H} = [\partial^2 F / \partial x_i \partial x_j]^{-1}$), der korrigeres for hvert trin.

Metoderne virker forskelligt, idet Powell's metode søger langs en række søgeretninger i hver iteration. Det punkt, der har den hidtil mindste værdi af bæreevnen, bevæger sig langs en trappe-

kurve. DFP-metoden analyserer omgivelserne, dvs. opbygger en tilnærmelse til H ud fra kendskab til bl.a. gradienten, hvorefter en (forhåbenlig) optimal søgeretning vælges.

Ved stærkt ikke-lineære problemer synes erfaringer at vise, at Powell's metode er den mest robuste, da det kan være nødvendigt at bestemme minimum i søgeretningerne meget nøjagtigt for at DFP-metoden fungerer efter hensigten.

REFERENCER:

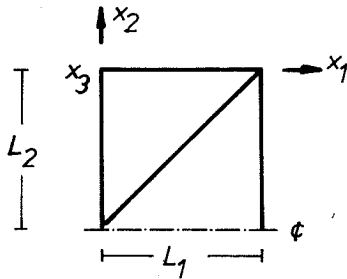
- [1] Fox, R.L.: Optimization Methods for Engineering Design. Addison & Wesley. Reading Mass., 1971.
- [2] Himmelblau, D.M.: Applied Nonlinear Programming. McGraw-Hill, 1972.

7. NUMERISKE EKSEMPLER

E - 1 Rektangulær plade - Eulersøjle

I dette eksempel betragtes en rektangulær plade, der er simpelt understøttet på to modstående sider. De øvrige sider er frie. Idet tværkontraktionsforholdet sættes til nul kan de opnåede resultater direkte sammenlignes med analytiske løsninger for søjler.

Geometri:



$$L_1 = 400$$

$$L_2 = 400$$

Fig. 1

Fysik:

$$E = \text{Elasticitetstallet} = 2100$$

$$\nu = \text{Poisson's forhold} = 0$$

$$t = \text{pladetykkelsen} = 4$$

Belastning:

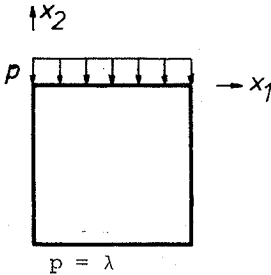


Fig. 2

Understøtning:

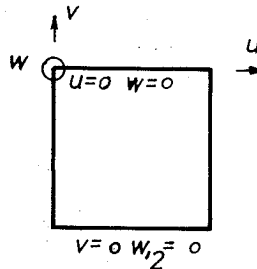


Fig. 3

Linear kontrol:

forkortelse er $\frac{p}{t} \cdot \frac{L_2}{E} = \lambda \cdot \frac{1}{21}$

Denne forkortelse findes eksakt for $\lambda = 1$.

Egenværdibestemmelse:

Den bestemte egenværdi er 1.00006 gange større end den eksakte værdi for den tilhørende Eulersøjle.

Postbuckling:

Opførselen af pladen efter foldningen er analyseret, idet en række beregningstrin er udført med den på nedenstående figur viste knudeflytning som styrende parameter. Belastningsparameteren λ er bestemt ved den ligevægtsligning, der hører til den styrende flytning, V_{styr} .

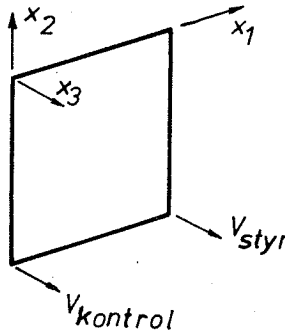


Fig. 4

Beregningen er gennemført ved iteration, der er fortsat indtil konvergens er opnået. I nedenstående skema er en række resultater anført. Størrelsen $V_{kontrol}$ er tværflytningen af den frie midterknude.

V_{styr}	V_{kontrol}	λ/λ_c	$\frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c} \cdot \frac{1}{V_{\text{styr}}^2}$
.5000	.5003	1.0003	.0032
1.0000	1.0008	1.0012	.0029
1.5000	1.5014	1.0027	.0028
2.0000	2.0023	1.0046	.0027
3.0000	3.0052	1.0099	.0025
4.0000	4.0097	1.0162	.0023

Det ses, at belastningsparameterens opførsel efter foldningen med god tilnærmelse kan beskrives ved at tilvæksten i λ er proportional med kvadratet på amplituden i udbøjningen.

På den nedenstående figur er afbildet sammenhørende værdier af belastningsparameter og forkortelse. De i tabellen anførte punkter er markeret på kurven.

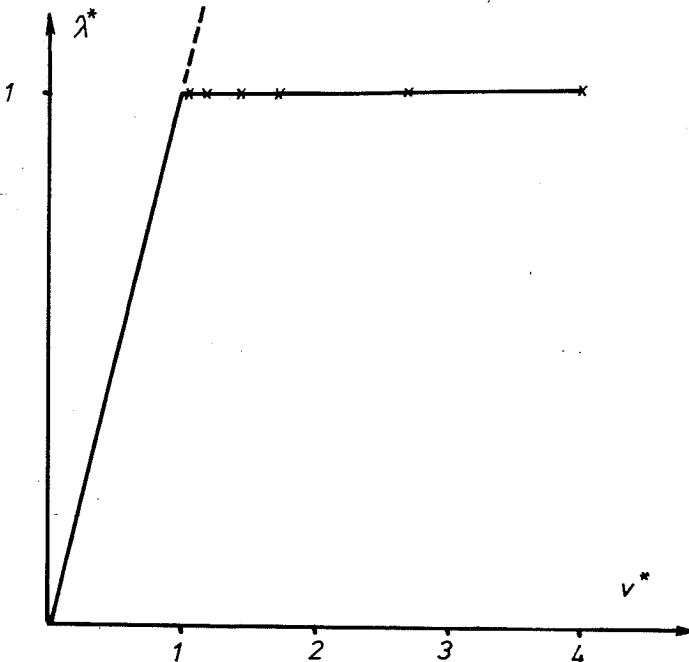


Fig. 5.

λ^*	v^*
1.0003	1.047
1.0012	1.190
1.0027	1.428
1.0046	1.759
1.0099	2.706
1.0162	4.024

$$\lambda^* = \lambda/\lambda_c$$

v^* = knudeflytningsvektor multipli-
ceret med enhedsbelastningsvektor.

E - 2 Rektangulær plade med tværbelastning

I dette eksempel betragtes en rektangulær plade, der er simpelt understøttet langs to modstående sider og fri langs de øvrige. Geometri, fysik og elementinddeling er som i eksempel 1.

Belastningen er som vist på figuren nedenfor.

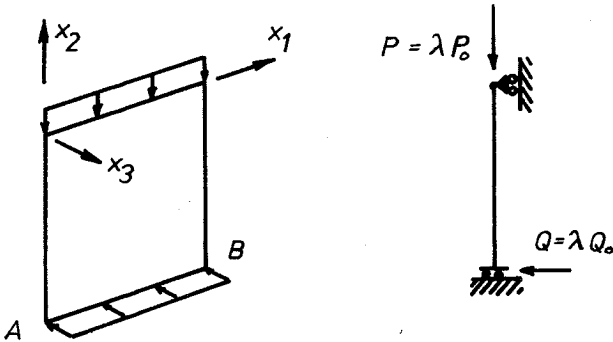


Fig. 1

Tværbelastningen Q_0 er valgt så tværflytningen får værdien 1 ved en lineær beregning.

Lineær beregning:

Såvel sammentrykning som maximaludbøjning får nøjagtig de forventede værdier.

Ikke-lineær beregning:

Da konstruktionen er statisk bestemt kan en analytisk løsning enkelt tilvejebringes. Udtrykket for maximaludbøjningen er

$$w_{\max} = L_2 \alpha \left(\frac{\tan(kL_2)}{kL_2} - 1 \right),$$

med L_2 = halv pladelængde

$$k = \lambda \cdot \frac{12P_0}{EL_1 t^3}$$

$$\alpha = Q_0/P_0$$

I det nedenstående skema er angivet eksakte og beregnede værdier af maximaludbøjningen

λ	w_{ex}	w_A	w_B
.50	- .63682	- .63659	- .63646
1.00	- 1.75706	- 1.74891	- 1.74768
1.50	- 4.26328	- 4.09655	- 4.08709

De beregnede værdier stammer fra en beregning, hvor konvergenzkriteriet var, at den relative ændring mellem to iterationstrin ikke måtte overstige 10^{-4} . De benyttede belastningsparametre er $P_0 = 30$ og $Q_0 = 0.21$, mens de fysiske og geometriske parametre er $L_1 = L_2 = 400$ $t = 4$ $E = 2100$ $\nu = 0$.

E - 3 Lang rektangulær plade med axial belastning

I dette eksempel betragtes en rektangulær plade, der sammentrykkes i den ene karakteristiske retning af et stift åg. Foldningsmønstret svarende til den laveste egenværdi sammenlignes med den eksakte løsning. Forbindelsen mellem løsningens kvalitet og elementstørrelsen belyses.

Geometri:

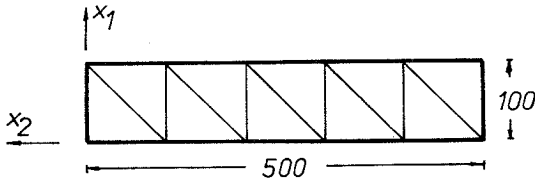


Fig. 1

Fysik: E = elasticitetstallet = 2100

ν = Poisson's forhold = 0

t = skaltykkelsen = 1

Elementinddeling: Der er benyttet et element i 1-retningen og fem elementer i 2-retningen.

Grov elementinddeling - hel plade betragtes

Understøtning for lineær beregning:

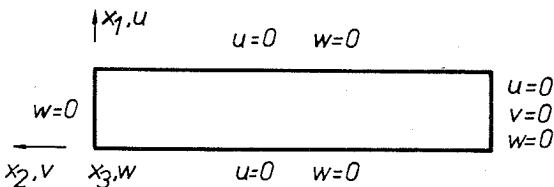


Fig. 2

Belastning ved lineær beregning:

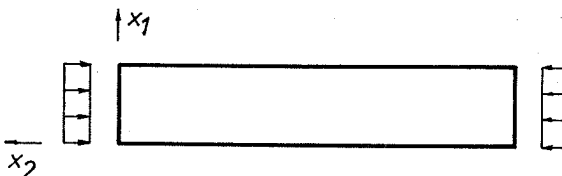


Fig. 3

jævnt fordelt belastning med intensiteten λ .

Kontrol af lineær beregning:

$$\text{forkortelsen} = \frac{\lambda \cdot 1 \cdot L_1}{EtL_1} \cdot L_2 = \frac{5}{21} \lambda$$

Denne værdi findes også ved beregningen. Forkortelsen viser sig som ønsket uafhængig af koordinaten x_1 .

Understøtning benyttet ved egenværdibestemmelsen

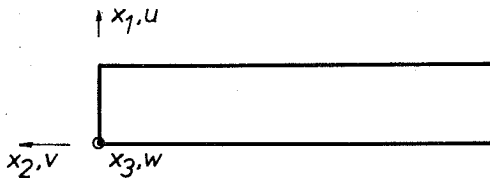


Fig. 4

Flytningerne er fixeret langs randen.

Resultat:

Den fundne egenværdi er $\lambda = .7344 \approx 1.06 \times \lambda_{ex}$

Finere elementinddeling - kvart plade betragtes

Nu betragtes den på figuren viste fjerdedel af en rektangulær plade.

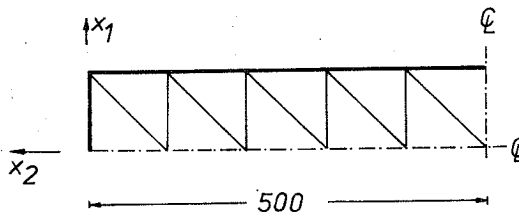


Fig. 5

Prebucklingstilstanden svarer fuldstændig til den der optrådte i den hele plade.

Understøtning benyttet ved egenværdibestemmelsen

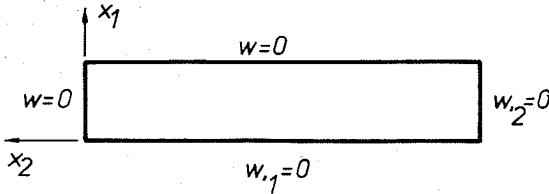


Fig. 6

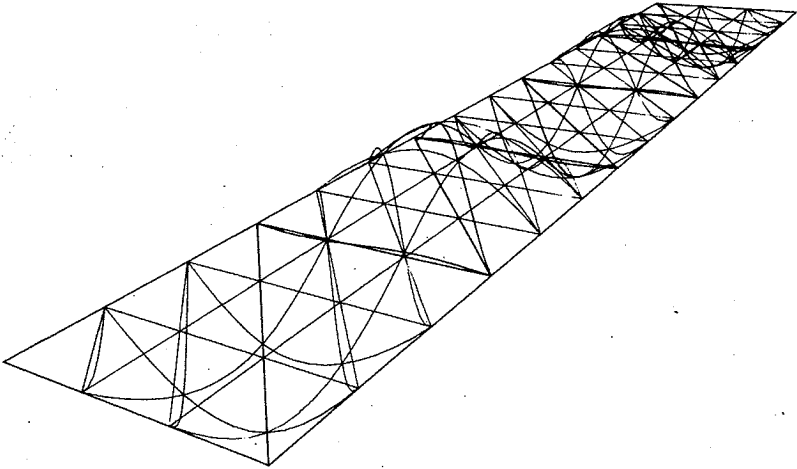
Resultat:

Den fundne egenværdi er $\lambda = .172832 = 1.0007 \times \lambda_{\text{ex}}$

Konklusion:

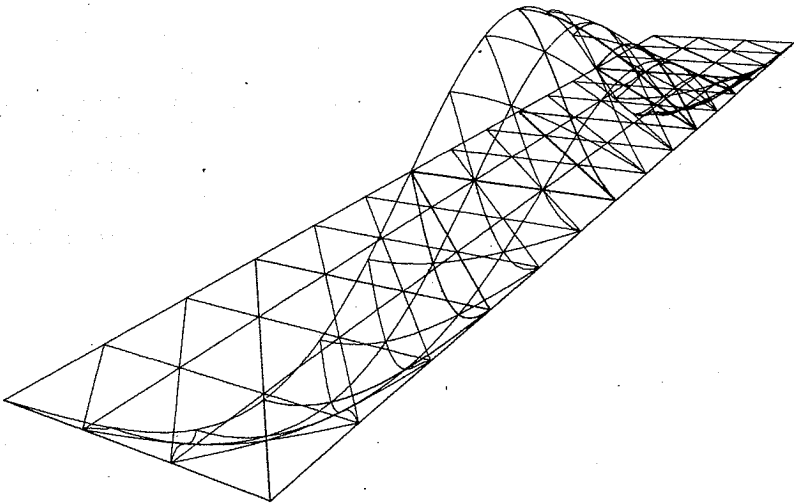
Eksemplet viser, at beskrivelsen af en bule med to elementer fører til resultater, der afviger med få procent fra de korrekte. Beskrivelsen af en bule med otte elementer giver resultater, der stemmer overens med de analytiske.

Nedenfor er foldningsmønstrene for de to tilfælde afbildet. Elementinddelingen og geometrien er valgt således, at knudelinierne for den analytiske løsnings foldningsmønster falder sammen med elementrande. Det ses, at den grove elementinddeling ikke giver sammenfald mellem elementrande og knudelinier. Dette forhold skyldes, at den afledede af udbøjningen er tvunget til at variere kubisk på tværs af en elementrand, mens den ellers kan variere som et fjerdegradspolynomium.



FØLDNING AF LANG SU PLADE MED AXIAL BELASTNING

Fig. 6



FØLDNING AF KVART LANG SU PLADE MED AXIAL BELASTNING

Fig. 7

E - 4 Kvadratisk plade underkastet ren forskydning

I dette eksempel betragtes en kvadratisk simpelt understøttet plade. Pladen belastes med konstant forskydningsbelastning langs randene. Den kritiske last bestemmes.

Geometri:

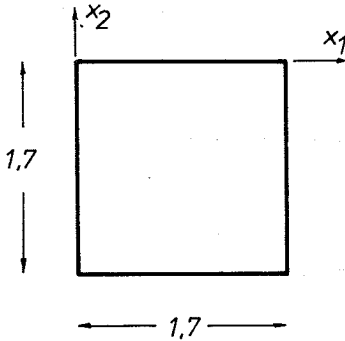


Fig. 1

Fysik:

E = elasticitetstallet = $2.1 \cdot 10^6$

ν = Poisson's forhold = 0.3

t = pladetykkelsen = $2.9 \cdot 10^{-3}$

Understøtning:

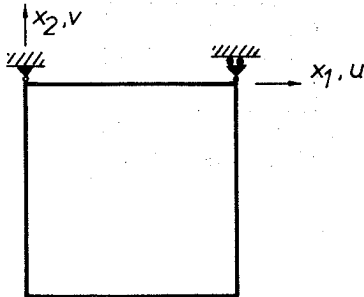


Fig. 2

Pladeflytningen er sat til nul langs randen.

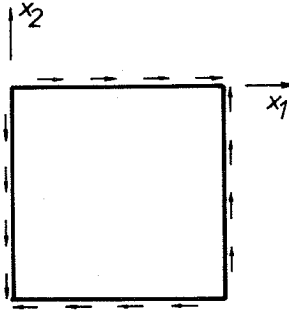
Belastning:

Fig. 3

Langs randene er påført en enhedsforskydningsbelastning i de på figuren angivne retninger.

Elementinddeling:

For at belyse elementets formåen er der foretaget en række kørsler med forskellig element størrelse. På figuren er vist element inddelingen for den fineste inddeling.

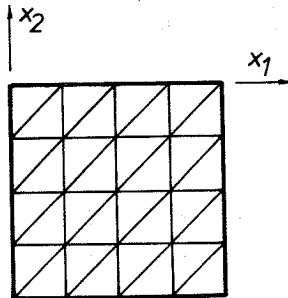


Fig. 4

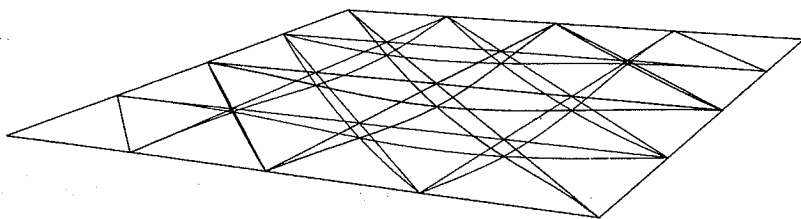
De opnåede tilnærmelser til de numerisk laveste egenverdier er samlet nedenfor

N	DOFOS _{ef}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	4	- .18597	-	- .72804	.48429
2	22	- .15190	.16484	- .18922	.20010
3	52	- .14993	.15109	- .18658	.18754
4	94	- .14953	.14977	- .18543	.18552

$$N = \{ 0.5 \times \text{elementantal} \}^{\frac{1}{2}}$$

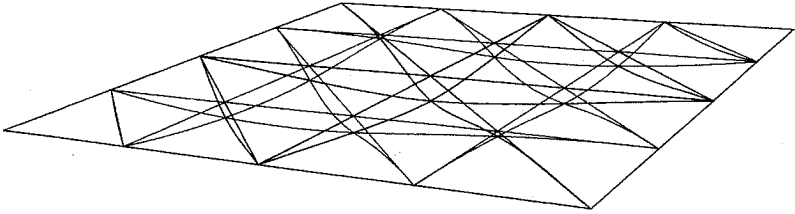
Værdierne i tabellen er placeret således, at de hører til den samme type foldning (dvs en eller to buer i den ene eller anden retning). Beregningerne er udført med 3 iterationsvektorer for $N = 1$ og med 5 for $N = 2, 3, 4$.

På de nedenstående figurer er vist foldningsmønstre stammende fra beregningen med $N = 2$.



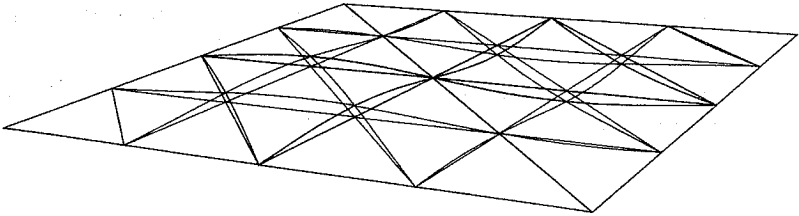
FOLDNING AF KVADRATISK PLADE MODE NO 1
 $a=(4,2,1,0,1,0), (T,Z)=(30,10), \text{FAKTOR}=0.1$

Fig. 5



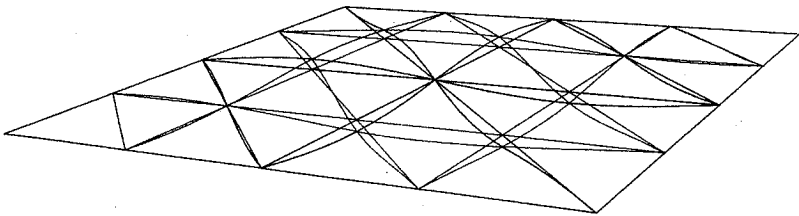
FÖLDNING AF KVADRATISK PLADE MODE NO 2
 $A=(4,2,1,0,1,0), (T,Z)=(30,10), \text{FAKTOR}=0,1$

Fig. 6



FÖLDNING AF KVADRATISK PLADE MODE NO 3
 $A=(4,2,1,0,1,0), (T,Z)=(30,10), \text{FAKTOR}=0,1$

Fig. 7



FÖLDNING AF KVADRATISK PLADE MODE NO 4
 $A=(4,2,1,0,1,0), (T,Z)=(30,10), \text{FAKTOR}=0,1$

Fig. 8

E - 5 Cylindertag med egenvægt

I dette eksempel behandles et cirkulær cylindrisk tag, der er påvirket af en jævnt fordelt egenvægtsbelastning. I [1] er det samme eksempel regnet igennem med elementer, der er baseret på den samme teori, men hvor samtlige flytninger er interpoleret som w .

Geometri.

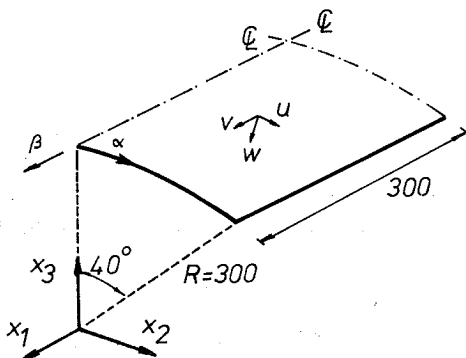


Fig. 1

$$(\alpha, \beta) \in [0, 40] \times [-300, 0]$$

Fysik:

$$E = \text{Elasticitetstallet} = 3 \cdot 10^6$$

$$\nu = \text{Poisson's forhold} = 0$$

$$t = \text{skaltykkelsen} = 3.0$$

Belastning:

Belastningen er jævnt fordelt med intensiteten 0.625 i x_3 -retningen.

Understøtning:

Skallen understøttes på skiver langs enderande.

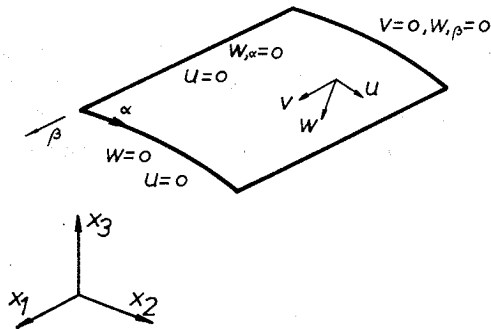


Fig. 2

Konstruktionen er gennemregnet for tre element inddelinger, hvoraf den groveste ($N = 2$) er vist på nedenstående figur.

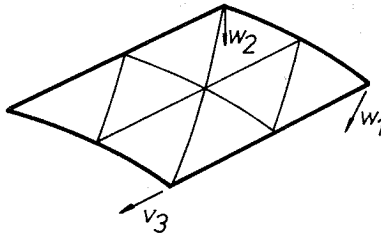


Fig. 3

I den følgende tabel er angivet resultater for de på figuren viste prøvflytninger, w_1 , w_2 , v_3 .

N	DOF _{ef}	w_1	w_2	v_3
2	88	3.67	- .458	.134
3	179	4.03	- .515	.149
4	302	4.08	- .523	.151

Det ses, at forskellen mellem resultaterne for $N = 3$ og $N = 4$ er ringe, og at resultaterne svarende til $N = 2$ kun afviger med ca. 10% fra de, der opnås med en fin elementinddeling

For at illustrere effekten af at alle flytninger interpoleres på samme måde som tværflytningen w , er i den nedenstående tabel anført værdier hørende til forskellig elementinddeling. Som prøveflytning er valgt w_1 .

N		[1]
2	3.673	3.978
3	4.030	3.985
4	4.083	3.985
løsn.	4.099	3.985

Det forhold, at der er angivet to forskellige værdier for den eksakte løsning, skyldes at der i [1] er anvendt en skalteori, der også kan anvendes på relativt dybe skaller. Det ses, at resultaterne fra [1] praktisk talt er uafhængige af elementinddelingen. Selv for elementinddelingen med to elementer ialt er fejlen kun ca. 2%. Resultaterne, der er opnået med det i afsnit 4 beskrevne element, viser en mere behersket konvergenshastighed.

De øvrige eksempler, der er givet i [1], viser, at elementet med 54 frihedsgrader, giver bemærkelsesværdigt gode resultater, hvis kvalitet i høj grad må tilskrives det forhold, at stiftlegemebevægelserne kan beskrives særdeles fint.

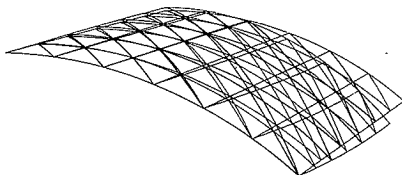


Fig. 4

LINEAR FLYTNING AF CYLTRE

[1]: D.J.Dawe High-Order Triangular Finite Element for Shell Analysis.

Int.J.Solids Structures. 1975. vol. 11, pp. 1096-1110.

E - 6 Cirkulær-cylindrisk panel

I dette eksempel betragtes en del af en stringerafstivet cirkulær cylinder. Resultaterne sammenlignes med en analytisk undersøgelse [1].

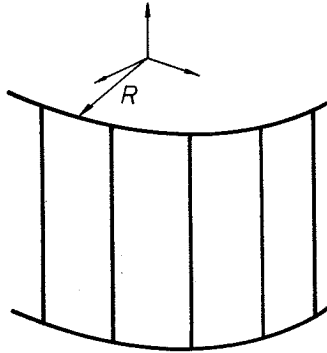


Fig. 1

Det antages, at stringerne fastlægger knudelinier for foldningsflytningen i normalens retning.

- [1]: W.T.Koiter Buckling and Post-buckling Behavior of a cylindrical Panel Under Axial Compression. Report S 476, National Aeronautical Research Institute, Amsterdam 1956.

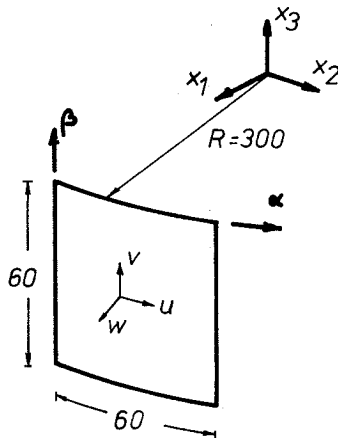
Geometri:

Fig. 2

Fysik:

E = Elasticitetstallet = 2100

ν = Poisson's forhold = 0.3

t = skaltykkelsen : varieres

Belastning:

Belastningen er påført således, at den aksiale forkortelse er uafhængig af buekoordinaten α . I prebuckling-tilstanden, hvor deformationer forårsaget af tværkontraktionsforholdet, ν , ikke hindres, er belastningen jævnt fordelt langs randen.

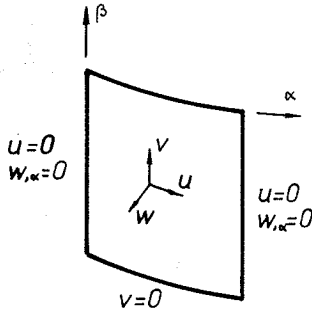
Understøtning - prebuckling:

Fig. 3

Randbetingelsen $w_{,\alpha} = 0$ langs rande i frembringerretningen. For retages beregningen uden denne randbetingelse, bliver den konstante tværflytning overlejet med en "stiftlegemebevægelse" af form som en rotation af skalstykket om en frembringer.

Understøtning - Buckling:

I [1] er foldningsflytningsfeltet givet ved

$$\begin{aligned} u &= A \sin px \cos qy \\ v &= B \cos px \sin qy \\ w &= \sin px \sin qy, \end{aligned}$$

hvor x og y er dimensionsløse koordinater og p og q bølgeantal i frembringer- og ringretning.

Den del, der her betragtes, er udsåret mellem knudelinier for tværflytningsfeltet. De indførte randbetingelser er vist på figuren.

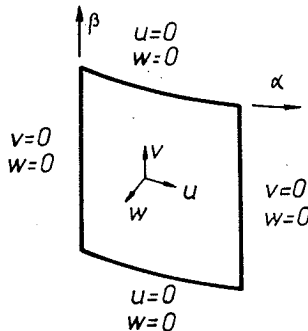


Fig. 4

Elementinddelingen er vist på figuren.

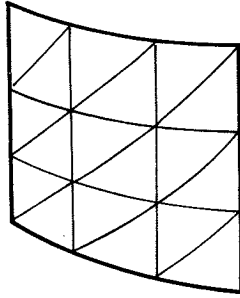
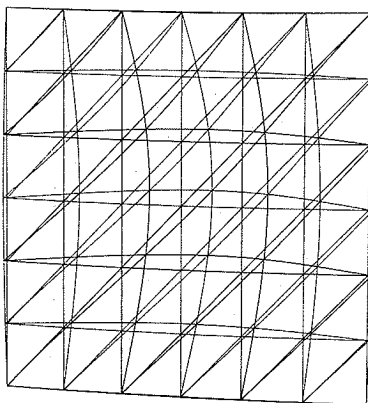


Fig. 5

Geometriske og fysiske størrelser er valgt således, at for $t > 1$ vil et foldningsmønster med en bue mellem stringerne være det farligste. Nedenfor er anført værdier for den kritiske belastning p^{cr} .

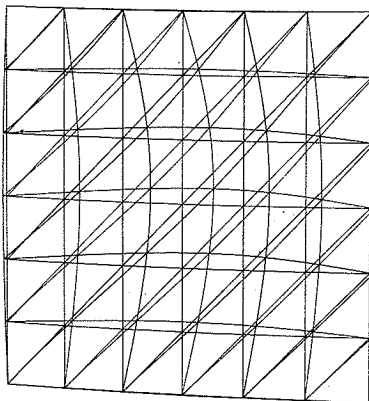
t	$p_{FEM}^{cr} / p_{ex}^{cr}$
1	1.0004
$\frac{1}{2}$	1.0336
$\frac{1}{4}$	1.0642

De konstaterede afvigelser svarer nøje til de i eksempel 3 bestemte. Modelleres en bue med et par elementer bliver fejlen nogle få procent.



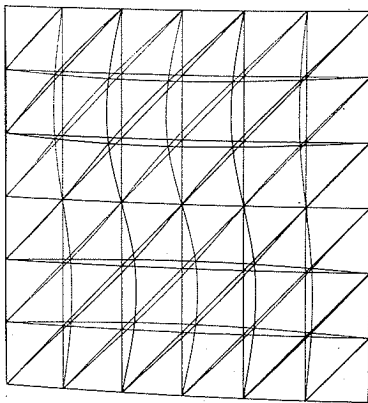
CIRKULERT PANEL - MODE NO. 1 - TYKKELSE = 2.00

Fig. 6



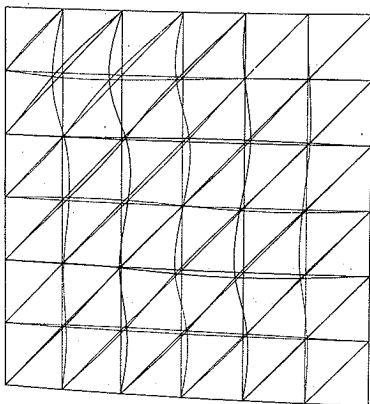
CIRKULERT PANEL - MODE NO. 1 - TYKKELSE = 1.00

Fig. 7



CIRKULERT PANEL - MODE NO. 1 - TYKKELSE = 0.50

Fig. 8



CIRKULERT PANEL - MODE NO. 1 - TYKKELSE = 0.25

Fig. 9

E - 7 Foldning af en perfekt cirkulær cylinder

Dette eksempel har til formål at belyse, om den foreslåede metode til egenværdibestemmelse kan anvendes på en konstruktion, hvis belastning og geometriske udformning medfører, at der optræder mange egenverdier i umiddelbar nærhed af den mindste.

De numeriske resultater kan endvidere give retningslinier for i hvilken udstrækning en del af en cylinderskal kan benyttes som model for den fuldstændige skal.

Der er i [1] gennemført en analytisk behandling af foldningsforholdene for en uendelig lang cirkulær cylinder med en konstant axial spænding før foldningen. Resultaterne er resumeret i [2]. Analysen består af følgende trin

- 1) Et sæt lineære skalligevægtsligninger perturberes.
- 2) En antagelse om at foldnings-tillægsflytningerne kan udtrykkes ved produkter af trigonometriske funktioner i koordinater i ring- og akseretningen indsættes i de perturberede liggvægtsligninger.
- 3) De resulterende "stabilitetsligninger" kan reduceres til et 3×3 -matrixegenværdiproblem.
- 4) En tilnærmet løsning til egenværdiproblemet opstilles.

Afbildes sammenhørende værdier af den kritiske spænding og bølgelængden i akseretningen i dobbeltlogaritmisk afbildning fremstår de karakteristiske "guirlandekurver" [2], fig. 240, p 459.

Det fremgår, at den laveste egenværdi praktisk talt er uafhængig af bølgelængde-radiusforholdet. Undtagelser findes for meget små

- [1] : W. Flügge Statik und Dynamik der Schalen
1957, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg
- [2] : S.P.Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger
Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.

værdier af bølgelængde-radiusforholdet, hvor værdierne svarer til dem, der optræder for flade plader med axial belastning, samt for bølgelængde-radiusforhold, der er meget store.

I disse tilfælde opfylder den fundne løsning imidlertid ikke skalteoriens forudsætninger.

Teorien fra [1] kan benyttes til behandling af skaller af endelig længde idet de undersøgte bølgelængde-skallængdeforhold antager diskrete værdier. Randbetingelserne er noget specielle, (R_A se nedenfor). Resultaterne svarer helt til dem, der blev fundet for den uendeligt lange cylinder, nemlig at foldningslasten er uafhængig af længden bortset fra meget korte skaller.

I det følgende er der analyseret en skal med følgende geometri.

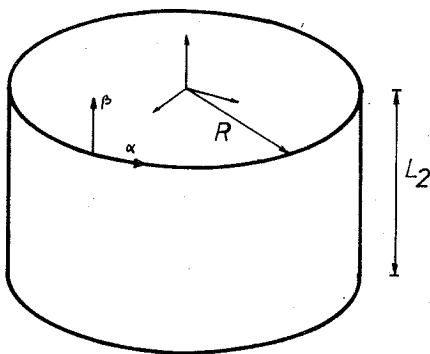


Fig. 1

Flytningstilstanden før foldningen er

$$u = 0$$

$$v = -\lambda\beta/Et$$

$$w = \lambda v/Et$$

Ved beregningerne er benyttet følgende typer af randbetingelser

<u>R_A</u> :	$w \equiv 0$, $u \equiv 0$, $w_{,\beta\beta} = 0$ i knuder	$\beta = 0$, L_2
	$w \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\alpha = 0$
<u>R_B</u> :	$w \equiv 0$, $u \equiv 0$, $w_{,\beta\beta} = 0$ i knuder	$\beta = L_2$
	$w_{,\beta} \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\beta = 0$
	$w \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\alpha = 0$
<u>R_C</u> :	$w_{,\beta} \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\beta = 0$, L_2
	$w \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\alpha = 0$
<u>R_D</u> :	$w \equiv 0$, $u \equiv 0$, $w_{,\beta\beta} = 0$ i knuder	$\beta = 0$, L_2
	$w \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\alpha = 0$, L_1
<u>R_E</u> :	$w \equiv 0$, $u \equiv 0$, $w_{,\beta\beta} = 0$ i knuder	$\beta = 0$, L_2
	$w \equiv 0$, $v \equiv 0$	$\alpha = 0$
	$w_{,\alpha} \equiv 0$, $u \equiv 0$	$\alpha = L_1$

Idet N_α og N_β betegner antallet af elementinddelinger i henholdsvis ring- og frembringerretningen og D den del af skalringen, der er modelleret med elementer, kan en række beregninger, hvis resultater er givet i tabel 2, karakteriseres ved

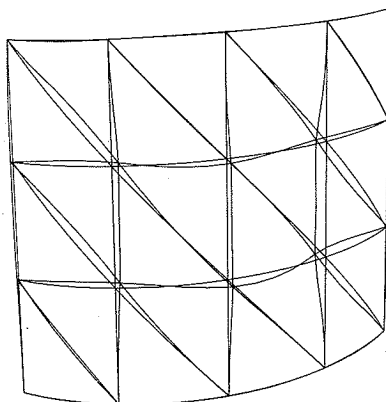
Eks	N_α	N_β	D	L_1	L_2	U
A1	12	1	1	36.0	7.50	R_A
A2	12	1	1	36.0	7.50	R_C
B1	12	2	1	36.0	7.50	R_A
B2	12	2	1	36.0	7.50	R_C
C1	4	3	1/4	9.00	7.50	R_D
C2	4	3	1/4	9.00	7.50	R_E
D	12	2	1	36.0	3.75	R_B
E	2	5	1/12	3.00	7.50	R_D

tabel 1

ITNO	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D	E
1	-	1.9224	1.3512	1.3658	1.1726	1.1629	1.0687	1.0142
2	1.4584	1.4094	1.1493	1.1980	1.0460	1.0150	.9801	.9387
3	1.3165	1.3072	1.0597	1.1088	.9982	.9737	.9400	.9091
4	1.2784	1.2839	1.0201	1.0605	.9704	.9556	.9212	.8955
5	1.2689	1.2786	1.0028	1.0382	.9504	.9457	.9104	.8873
6	1.2665	1.2774	.9942	1.0264	.9359	.9394	.9025	.8816
7	1.2658	1.2771	.9897	1.0193	.9261	.9346	.8956	.8773
8	1.2655	1.2770	.9871	1.0145	.9197	.9308	.8899	.8741
9	1.2654	1.2770	.9855	1.0106	.9156	.9277	.8849	.8717
10	1.2654	1.2770	.9846	1.0078	.9123	.9252	.8808	.8698
11	1.2654	1.2770	.9841	1.0057	.9110	.9230	.8875	.8683
12	1.2654	1.2770	.9837	1.0043	.9098	.9211	.8752	.8670
13	1.2654	1.2770	.9835	1.0034	.9089	.9195	.8736	.8658
14	1.2654	1.2770	.9834	1.0028	.9083	.9181	.8725	.8648
15	1.2654	1.2770	.9833	1.0023	.9078	.9167	.8717	.8638

tabel 2 konvergensforløb med nederste egenværdi (λ_1^*)

Resultaterne fra [1] giver $\lambda_{cr}^1 = .81$. Ved at extrapolere værdierne fra C1 kommer $\lambda_{FEM}^{C1} \sim .906$ (~10% fejl). Extrapolation af værdier fra E giver $\lambda_{FEM}^E \sim 0.85$ (~5% fejl). Fejlen på værdierne fra D og E stemmer overens til trods for at resultaterne fra D stammer fra en hel ring, mens E i realiteten er en "panelløsning" som de i E-6 viste. På den nedenstående figur er vist foldningsfeltet fra C1. Resultaterne fra [1] viser, at et foldningsmønster, som det her fundne, med seks bølger i ringretningen og en bølge i akseretningen er et af de kritiske for den analyserede skal.



CYL 7 MODE NO 1 N=(3,4)

Fig. 2

E - 8 Elliptisk cylinder

I dette eksempel analyseres en elliptisk cylinder med endelig længde, for hvilken randbetingelserne har større lighed med de i virkeligheden forekommende end de imperfekte cirkulære cylinder-skaller, der analyseres i andre eksempler. Geometriske og fysiske data er valgt således, at en sammenligning med de i [1] publicerede resultater kan foretages. De numeriske resultater i [1] er fremkommet ved beregning med et differensligningsprogram med anvendelse af en skalteori, der må antages at kunne beskrive tilstande, hvor der optræder store flytninger, bedre end den teori, der danner grundlag for det i afsnit 4 beskrevne element. På denne baggrund kan der konstateres nogen uoverensstemmelse mellem de her og i [1] præsenterede resultater. Forskellen er dog ikke større end at cylinderens opførsel ved de to beskrivelser kvalitativt og i rimelig grad også kvantitativt stemmer overens.

Ligesom i [1] er den detaljerede beregning foretaget for en kvart cylinder.

Der er foretaget beregning af såvel perfekte som imperfekte cylindreskaller. Den imperfektionsform, der benyttes, er den i [1] anvendte. Formen af imperfektionen er vist på fig. 1. De analyserede amplituder er 0.5 og 1.0 gange skaltykkelsen.

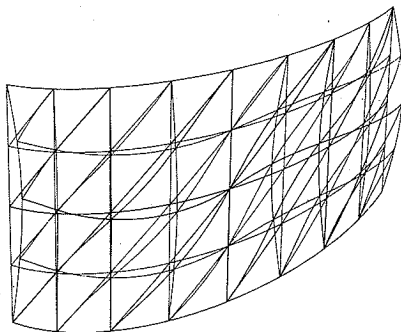


Fig. 1.

FORM AF IMPERFEKTION

[1]: Almroth, B.O., Brogan, F.A., Marlowe, M.B.

Collapse Analysis for Elliptic Cones. AIAA-Journal, vol. 9,
No. 1 (1971), pp. 32-37.

Den kvarte cylinder modelleres med 16 elementer, der på figurerne er vist med en underinddeling.

Eksemplets data er givet ved

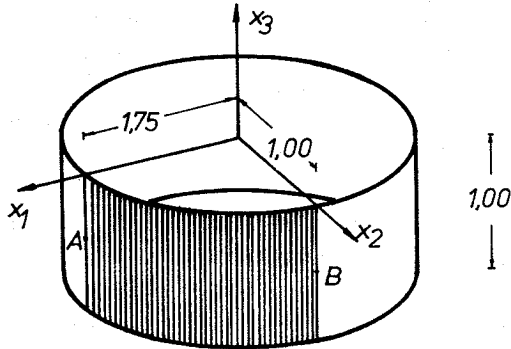


fig 2

Elasticitetskoefficienten, $E = 10^7$
 Tværkontraktionsforholdet, $\nu = 0.3$
 Skaltykkelsen, $t = 0.0144$
 Maximalimperfektion, $w_0 = \zeta \cdot t$

Understøtningen langs randene forhindrer flytninger, men tillader drejninger. Under belastningen er forkortelsen tvunget til at være konstant.

Belastningen på den analyserede fjerdedel af cylinderen betegnes med $\Lambda^*)$.

På den nedenstående figur 3 er forkortelsen, Δv , afbildet mod belastningen.

På figuren er vist et par resultater fra [1]. Det ses, at elementmodellen giver en beskrivelse, der er stivere end den i [1] benyttede model. Tallene på kurverne er den benyttede værdi af ζ .

*) Bemærkning: I [1] betegner lastparameteren P den totale last på cylinderen (dvs $P = 4 \times \Lambda$), mens den "end-shorting", der afbildes mod P i [1], fig. 2 er den halve af forkortelsen af den i fig. 2 viste cylinder.

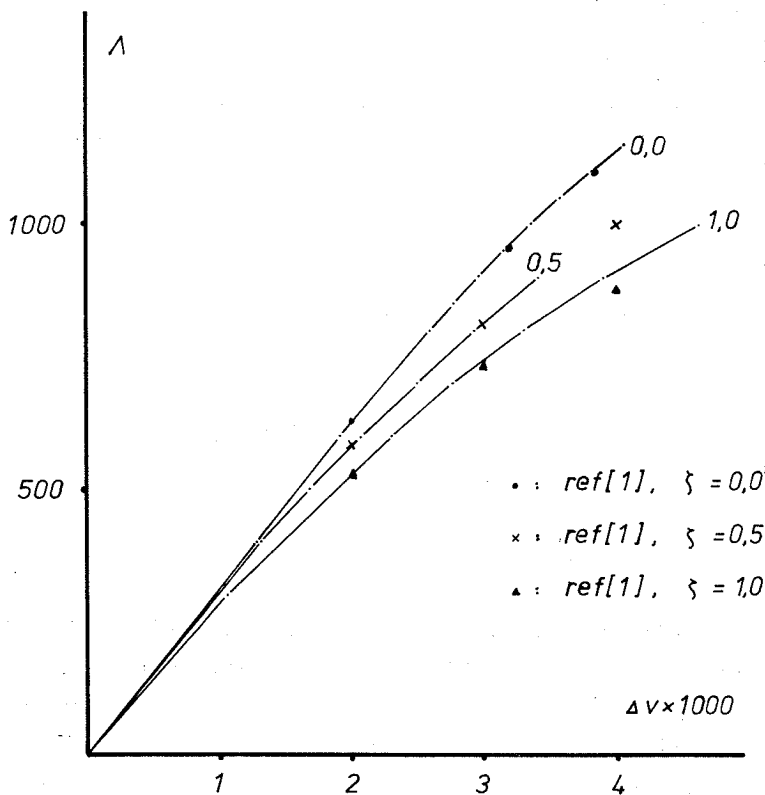


Fig. 3.

Ved de numeriske beregninger blev der ikke konstateret direkte fortegnsskift for determinanten for tangentstivhedsmatricen. Det fremgår imidlertid af den nedenstående figur 4, hvor determinanten hørende til den perfekte skal er afbildet mod belastningen, at det ved disse beregninger bestemte kritiske lastniveau stemmer overens med det i [1] bestemte.

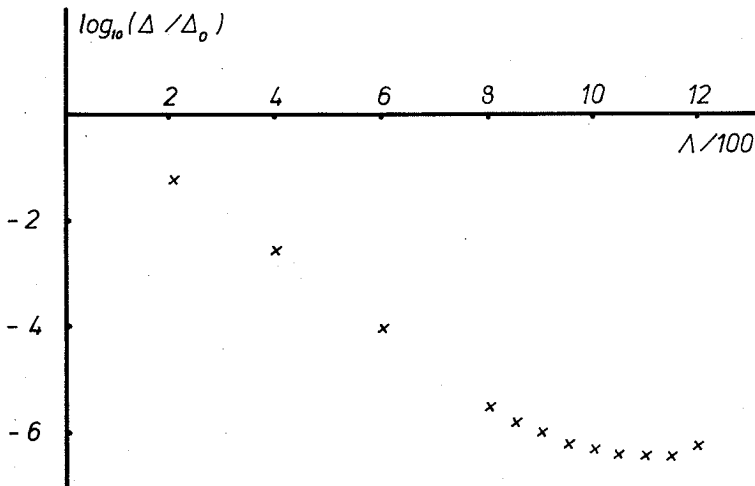


Fig. 4.

Det ses, at determinanten antager sin mindste værdi for $\Lambda \simeq 1100$. Denne værdi svarer til den værdi, der bestemmes i [1].

Til sammenligning kan det anføres, at en lineær egenverdianalyse med lineær prebucklingstilstand giver $\Lambda_{cr} = 969$.

For praktiske anvendelser er det vigtigt, at forløbet af tværflytningerne kan beskrives godt. Forløbet af disse betragtes i det følgende.

På figurerne 5 og 6 er vist forløbet af tværflytningen, w_B , midt på den flade side af cylinderen optegnet mod belastningsparameteren.

I [1], fig. 3 er vist et forløb af w_B , der såvel kvalitativt som kvantitativt harmoniserer fuldstændigt med Fig. 5 og fig. 6.

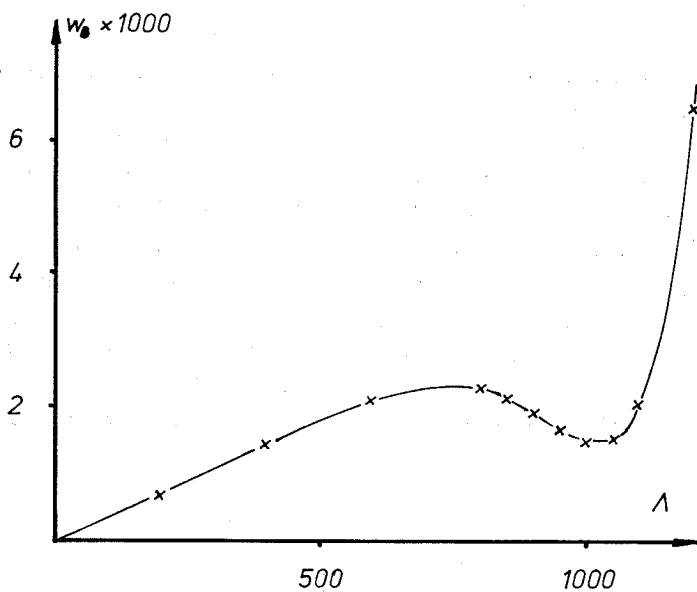


Fig. 5.

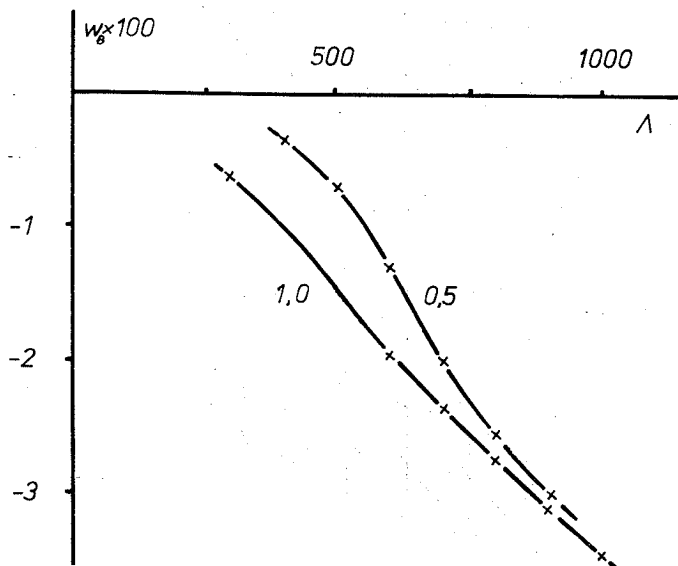


Fig. 6.

Nedenfor vises to billedserier til illustration af deformationsforløbet. Til forskellige værdier af Λ vises såvel den udeformerede som den deformerede konfiguration. Der betragtes dels en perfekt skal, fig. 7.1-7, dels en imperfekt, hvor amplituden af imperfektionen svarer til skaltykkelsen, fig. 8.1-7.

Endelig analyseres flytningsforløbet langs kurven AB (se fig. 2). I [1], fig. 5a) vises forløbet af flytningerne langs AB ved den kritiske last for en perfekt og en imperfekt skal. Denne figur viser det samme fænomen som fig. 7.1-7 og fig. 8.1-7, at bulen midt på den flade side for den perfekte skals vedkommende bevæger sig udad, mens den bevæger sig indad på den imperfekte skal.

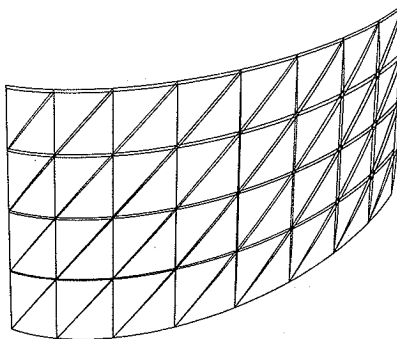


FIG. 7.1
PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 400$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

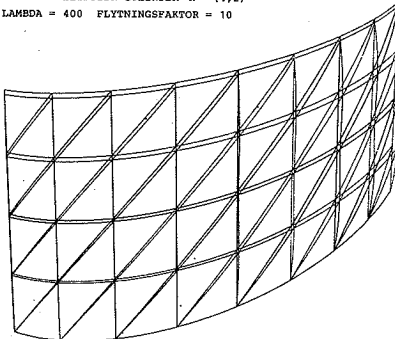


FIG. 7.2
PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 600$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

Fig. 7.1 og 7.2

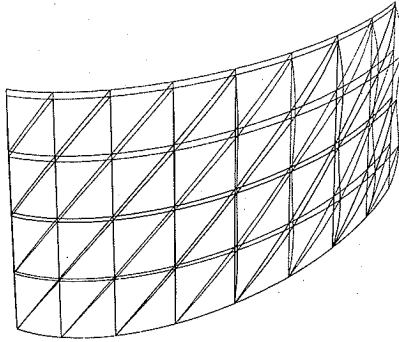


FIG. 7.3
 PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 800$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

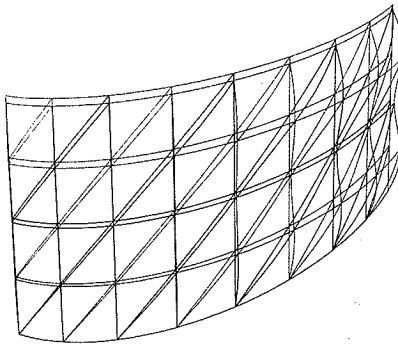


FIG. 7.4
 PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 900$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

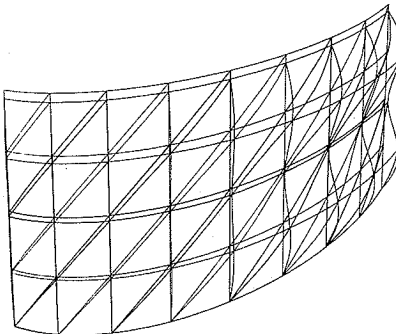


FIG. 7.5
 PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 1050$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

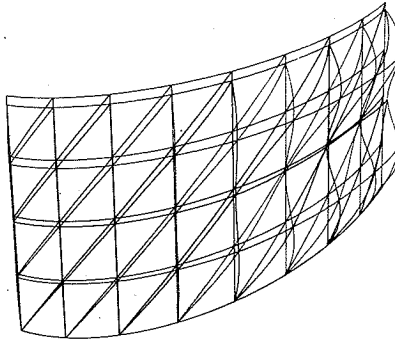


FIG. 7.6
 PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 1100$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

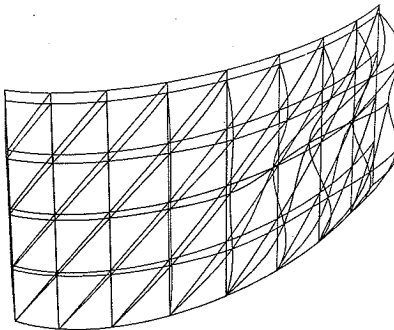


FIG. 7.7
 PERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 1200$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

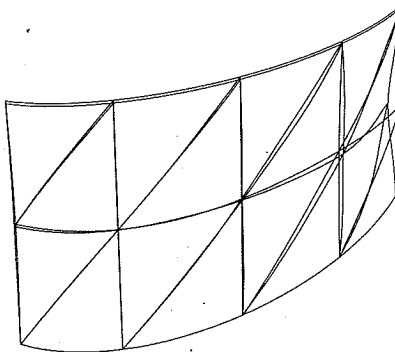


FIG. 8.1
 IMPERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 300$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

Fig. 7.6, 7.7, 8.1

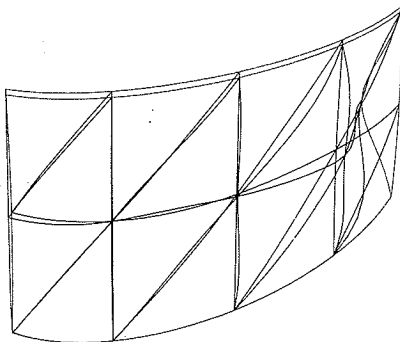


FIG. 8.2
IMPERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 600$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

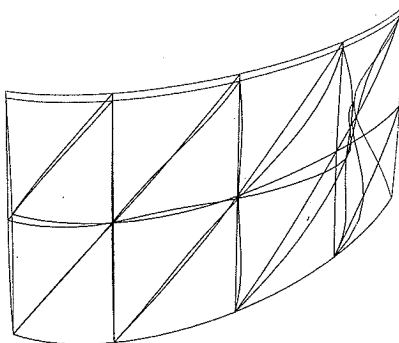


FIG. 8.3
IMPERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 700$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

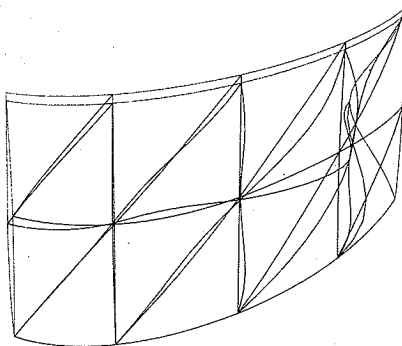


FIG. 8.4
IMPERFECT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 800$ FLYTNINGSFAKTOR ≈ 10

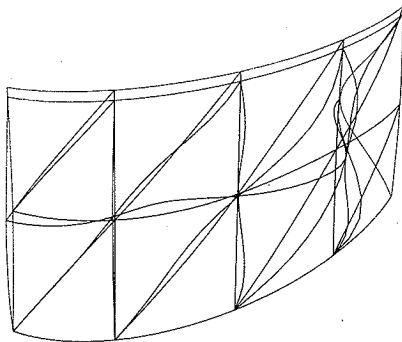


FIG. 8.5
IMPERFEKT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 900$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

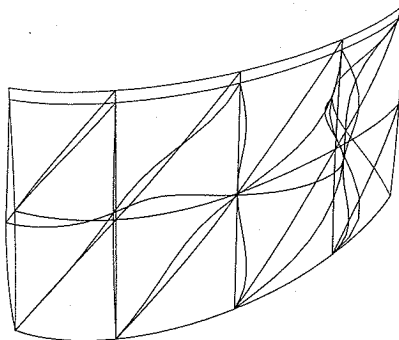


FIG. 8.6
IMPERFEKT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 1000$ FLYTNINGSFAKTOR = 10

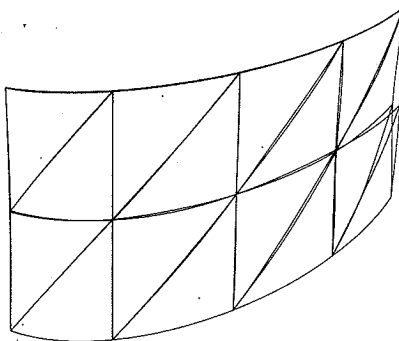


FIG. 8.7
IMPERFEKT ELLIPTISK CYLINDER $N = (4,2)$
 $\Lambda = 1000$ FLYTNINGSFAKTOR = 1

På fig. 9 vises forløbet af tværflytninger mellem punkterne A og B for den perfekte skal. Værdien af Λ er angivet ved kurverne.

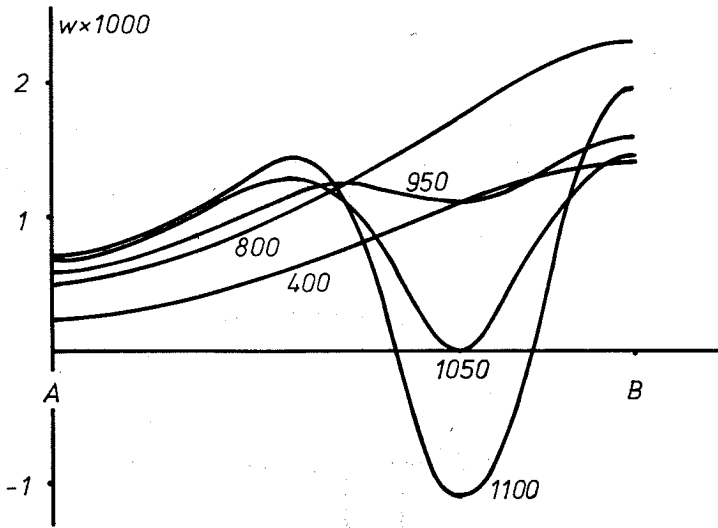


Fig. 9.

Figur 9 kan sammenlignes med [1], fig. 4. Det kan konstateres, at flytningsbilledet for $\Lambda \approx 1100$ nøje svarer til de i [1], fig. 4 og fig. 5a) viste kurver.

E - 9 Imperfekt cirkulær cylinder

I dette eksempel behandles den samme skal som i eksempel 7. Her bestemmes bæreevnens afhængighed af imperfektioner af form som den klassiske løsnings foldningsmønster, dvs. buler med knude-linier i frembringerretningen og i ringretningen.

Geometri

En tolvtedel af skallen betragtes idet den klassiske løsning for den givne geometri og fysik har seks hele bølger i ringretningen og en halv bølge i frembringerretningen indenfor det i eksempel 7 betragtede område.

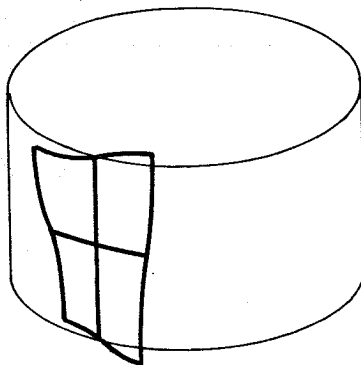


Fig. 1

Det betragtede udsnit er vist med fed streg på figuren.

Den benyttede model er opbygget af 8 elementer.

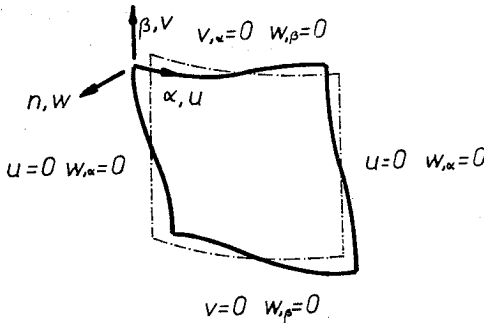
Understøtning:

Fig. 2

Belastning

Belastningen påføres på den "øverste" rand gennem et stift åg, dvs. den samlede axiale belastning er kendt og flytningen v er konstant langs den belastede rand.

Imperfektioner

Imperfektioner består af et produkt af cosinus-funktioner med argumenter proportionale med α henh. β . Maksimalværdien af imperfektionen målt udfra den perfekte skal er ζ gange skaltykkelsen.

Bestemmelse af kritisk last

Metoden med fastlægning af nulpunkter for determinanten for tangentstivhedsmatricen benyttes. Da et egentligt nulpunkt for determinanten ikke kan forventes fastlagt, og da der for $\zeta \neq 0$ optræder en grænslast og ikke en forgrening, er den kritiske værdi bestemt som den største last, for hvilken determinanten af tangentstivhedsmatricen er positiv.

Perfekt skal $\zeta = 0$

Dette tilfælde betragtes primært i kontroløjemed. Den værdi for den kritiske normalkraft, der er givet i [1], er med den her

anvendte normering $\lambda_{cr} = -2.44$.

De resultater, der opnåedes med elementprogrammet svarer nøje til de forventede, som det ses af det følgende.

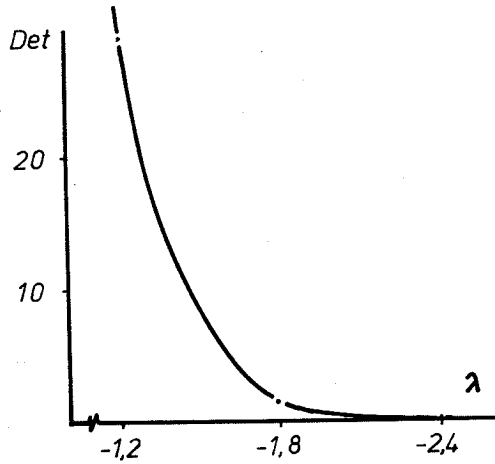


Fig. 3

- [1]: W.Flügge. Statik und Dynamik der Schalen
1957, Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Imperfekt skal $\zeta \neq 0$

Beregningerne forløber fuldstændig som for den perfekte skal. Som det ses på den nedenstående figur varierer determinanten mere omkring den kritiske værdi end tilfældet er for den perfekte skal.

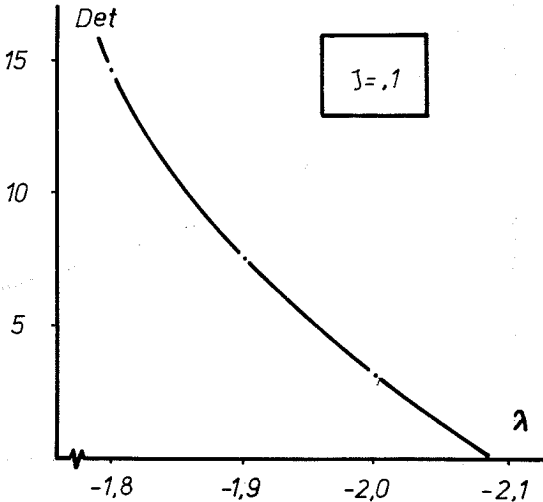


Fig. 4

For $\lambda = -2.1$ er determinantværdien usikker, men negativ.

Tilsvarende beregning er foretaget for $\zeta = 0.2$, $\zeta = 0.3$ og $\zeta = 1.0$. Værdierne for bæreevnen er afbildet på figuren herefter.

Resultaterne er sammenlignet med den imperfektionsfølsomhed, der i [2] er bestemt for et panel med knudelinier svarende til de her forudsatte.

[2]: W.T.Koiter. Buckling and Post-Buckling Behavior of a Cylindrical Panel under Axial Compression.

Report S 476, National Aeronautical Research Institute, Amsterdam 1956.

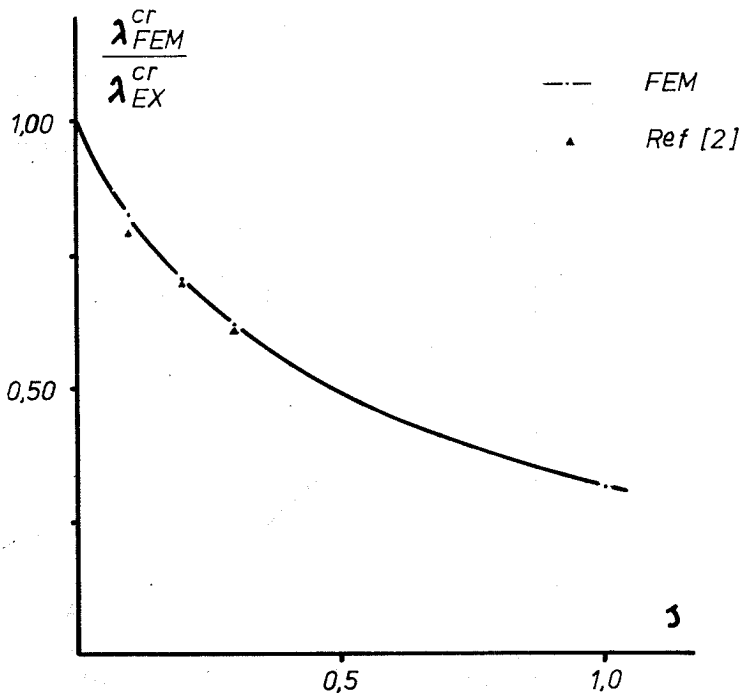


Fig. 5

E - 10 Imperfekt cirkulær cylinder.

I dette eksempel betragtes den samme skal som i eksempel 7 og 9. Der er imidlertid valgt en anden imperfektion end den i eksempel 9 behandlede.

I forsøg, hvor uafstivede cirkulære cylindre, sammentrykkes indtil foldning indtræffer, ser man ikke det foldningsmønster, der optræder i Flügge's klassiske løsning [1]. Det foldningsmønster, der ses, er karakteriseret ved, at der udelukkende optræder indgående buler. Bulemønsteret har knudelinier langs skruelinier på cylinderen. I [2] er givet et omfattende billedmateriale af foldningsmønstre for cylinderskaller afprøvet ved Institut für Flugzeugbau, Braunschweig. De eksperimentelle erfaringer viser, at foldningen har en lokal karakter. Der forekommer normalt en eller to "ringe" af buler i skallens midtefelt. Det forhold, at der ikke forekommer foldning i skallens randzoner, skyldes antageligt, at understøtningen yder en vis indspænding.

Geometri

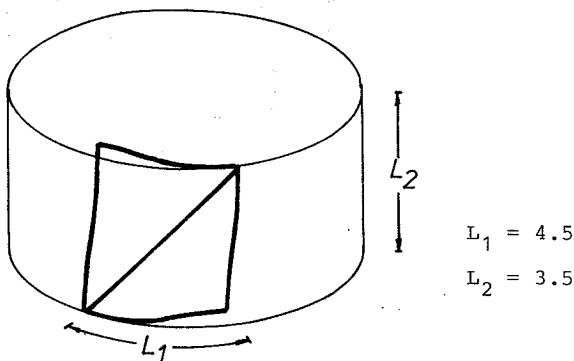


Fig. 1

[1]: W.Flügge Statik und Dynamik der Schalen. 1957, Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

[2]: M.Esslinger B.Geier Post-Buckling Behavior of Structures. Springer - Verlag Wien - New York, 1975.

På figuren er den betragtede imperfekte skaldel søgt vist med tyk streg.

Imperfektion.

Analytisk kan den imperfekte skals geometri beskrives som den konfiguration, der opstår, når den perfekte skal påføres flytningen

$$w = \zeta \cdot t \cdot \sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{L_1} + \frac{\pi\beta}{L_2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{L_1} - \frac{\pi\beta}{L_2}\right)$$

hvor α og β er buelængdekoordinater i ring- og frembringerretning.

Understøtning.

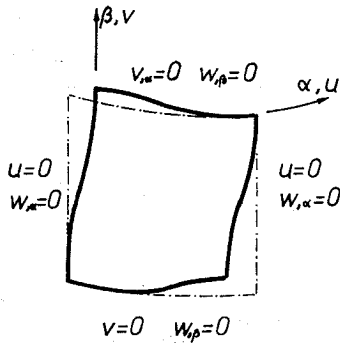


Fig. 2

Belastning.

Belastningen påføres gennem et stift åg, dvs. flytningen v langs den øverste rand er konstant, og den samlede belastning kendes.

De numeriske resultater kan samles i den nedenstående kurve, hvor den kritiske belastning afbildes mod imperfektionen.

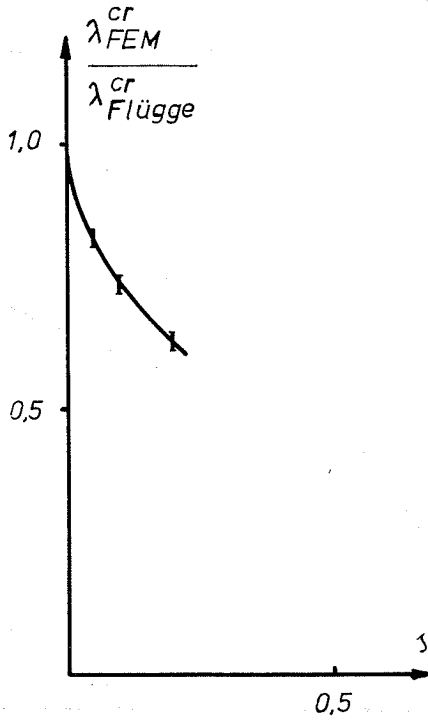


Fig. 3

Det ses, at denne imperfektion er "farligere" end den i eksempel 9 behandlede. Dette gælder dog alene for små værdier af ζ da en grænselast ikke nås for $\zeta = 1$.

På figuren nedenunder er forkortelsen afbildet mod lastparameteren for $\zeta = 1.0$.

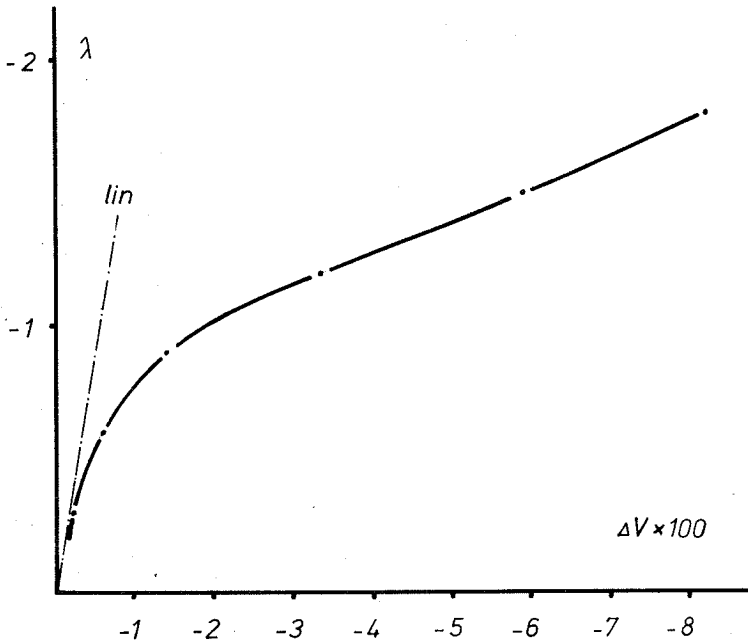


Fig. 4

8. SAMMENFATNING AF RESULTATER OG FORSLAG TIL YDERLIGERE ARBEJDE INDEN FOR OMRÅDET.

Resultater for kritisk bæreevne, der er opnået ved elementmodelling og fastlæggelse af nulpunkt for den anden variation af den potentielle energi ved hjælp af determinanten for tangentstivhedsmatricen, viser, at det er muligt at opnå overensstemmelse inden for få procent med kendte analytiske resultater såvel for geometrisk simple ("perfekte") som komplicerede ("imperfekte") skalformer selv med en relativ grov elementinddeling. I forbindelse med behandlingen af "imperfekte" skaller viser elementet, at det - som ventet - er i stand til at beskrive komplicerede flytningstilstande, hvorfor det vil kunne anvendes i forbindelse med bestemmelse af kritisk belastning for skaller, hvis geometri ikke muliggør en simpel analytisk løsning. Nedenfor er anført nogle emner, der umiddelbart har interesse i forbindelse med videre arbejde.

Opstilling og afprøvning af andre for praksis relevante materialemodeller end den lineære.

Afprøvning af om elementets flytningsfelter repræsenterer et optimalt valg.

Afprøvning af om de ikke-lineære bidrag til stivhedsmatricer kan integreres mindre nøjagtigt end med den anvendte 12-punktsformel.

Sammenligning af de opnåede resultater med beregninger baseret på anvendelse af de i afsnit 3.7 beskrevne "eksakte knudekræfter".

Da der er forbundet en intensiv numerisk indsats med fastlæggelse af nulpunkter for determinanten for tangentstivhedsmatricen, må enhver mulig optimering af beregningsgangen fx optimal bestemmelse af belastningstrin og fejlkrav, der anvendes ved iterationerne under beregningen, tilstræbes.

Den tilnærmede metode, der beskrives i kapitel 6, er langt mindre krævende i beregningsmæssig henseende. Især i betragtning af, at metoden beskrevet i afsnit 6.9.1 kan benyttes til bestemmelse af farlige imperfektionsmønstre, og at en del overflødige be-

regninger derfor kan undgås.

Et eksempel i afsnit 6.7.2 viser, at en beregning med et flytningsfelt, der kvalitativt blot nogenlunde svarer til de eksperimentelt observerede, kan føre til resultater, der både kvalitativt og kvantitativt ligger fuldstændigt på linie med resultater, der bliver bestemt ved langt mere raffinerede beregningsmetoder. Det ses, at det - som for søjlers vedkommende - er muligt at få rimelige resultater for bæreevnen ved anvendelse af en simpel energimetode med et skønnet udbøjningsfelt. Det ville derfor være særdeles ønskeligt, at metoden blev søgt anvendt på andre skalformer.

I forbindelse med den præsenterede metode til analyse af cirkulærcylindriske skaller med aksial belastning påkalder følgende emner sig umiddelbart interesse.

Beregning udfra antagelse om at bølgetallene λ og μ i flytningsfeltet ikke er faste givne størrelser, men variable med diskrete værdier.

Undersøgelse af om den i afsnit 6.9.1 skitserede ad-hoc-belastningsminimeringsprocedure kan forbedres eller med fordel erstattes med en anden.

Afprøvning af et flytningsfelt, hvis koordinatfunktioner er trigonometriske funktioner i buelængdekoordinater knyttet til højre- og venstresnoede skruelinier på cylinderskallen. Det ville så ikke være nødvendigt at benytte særligt mange led til at opbygge kvalitativt korrekte flytningsfelter.

Numerisk afprøvning af den i afsnit 6.10 skitserede metode til bæreevnebestemmelse.

9. SYMBOLER OG NOTATION

Summationskonventionen er konsekvent benyttet bortset fra en enkelt undtagelse i afsnit 7.5.3. I tensorligninger summeres over et øvre og nedre index. Der summeres normalt over 1 og 2 for græske indices. For små latinske indices summeres over 1 til 3 eller 1 til 6.

Differentiation:

- , : partiel differentiation
- | : kovariant differentiation i et tredimensionalt krumlinet koordinatsystem.
- || : kovariant differentiation i et todimensionalt fladekoordinatsystem.
- (.) : differentiation med hensyn til en monotont varierende parameter.

Symboler:

- \underline{A}_u : (4.3.3) koefficienter i polynomiet for u.
- \underline{A}_w : (4.4.9) koefficienter i polynomiet for w.
- \underline{A}_α : (2.2.3) kovariant basisvektor i koordinatsystemet hørende til den deformerede tilstand.
- $A_{\alpha\beta}$: (2.2.9) metrisk tensor for koordinatsystemet hørende til den deformerede tilstand.
- $\underline{a}_\alpha, \underline{a}^\beta$: (2.1.2), (2.1.11) basisvektorer hørende til koordinatsystemet i den udeformerede tilstand.
- $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$: (2.1.9), (2.1.11) metriske tensorer hørende til koordinatsystemet i den udeformerede tilstand.
- $a_{\alpha\beta A}$: (5.3.12) postbucklingkoefficient.
- \underline{B}_d : (4.5.7) tøjnings-tilstands-interpolationsmatrix.
- $\underline{B}_{du}, \underline{B}_{dv}, \underline{B}_{dw}$: (4.5.7) tøjnings-tilstands-interpolationsmatrixer hørende til flytningsbidragene u, v, w.
- $B_{\alpha\beta}$: (2.2.10), (2.2.14) krumningstensor hørende til koordinatsystemet på den deformerede flade.

\underline{b}_i	: (2.1.2) basisvektorer i et kartesisk referencekoordinatsystem.
$b_{\alpha\beta}, b_{\alpha}^{\beta}$: (2.1.6), (2.1.14) krumningstensorer hørende til koordinatsystemet på den udeformede flade.
$b_{\alpha\beta\gamma A}$: (5.3.13) postbucklingkoefficient.
\tilde{D}	: (4.2.2) koordinattransformationsmatrix mellem fladekoordinater og lokale elementkoordinater (ξ, η) .
\tilde{D}_e	: (3.2.4) forbinder system- og elementknudeflytningsvektorerne.
D^{ij}	: (3.3.1) elasticitetsmatrix.
\underline{d}	: (3.2.5), (4.5.4) "lineær" tilstandsvektor.
\underline{d}_u	: (4.3.5).
\underline{d}'_u	: (4.3.8).
\underline{d}_w	: (4.4.2).
\underline{d}'_w	: (4.4.8).
\underline{d}^*	: (3.2.7), (4.5.5) "ikke-lineær" tilstandsvektor.
$E_{\alpha\beta}$: (2.3.7), (2.3.30), (4.5.2) stræktøjningsmål.
\tilde{F}	: (A-4.1.7) koordinattransformationsmatrix mellem fladekoordinater og lokale elementkoordinater (ξ, η) .
\tilde{F}_e	: (3.2.6).
$H^{\alpha\beta\gamma\delta}$: (2.4.2) elasticitetstensor.
\tilde{K}_B	: (5.3.14).
\tilde{K}_T	: (5.2.1) tangentstivhedsmatrix.
$\tilde{K}_{\alpha\beta}$: (2.3.8), (2.3.31), (4.5.3) bøjningstøjningsmål.
\tilde{K}_{σ}	: (5.2.8) "geometrisk matrix", "Initial Stress Matrix".
\tilde{K}_O	: (3.6.1.1), (3.6.3.4) "lineær" stivhedsmatrix.
$\tilde{L}_{di}^1, \tilde{L}_{di}^2$: (3.2.8) matricer, der beskriver ϵ_i ved hjælp af tilstandsvektorerne \underline{d} og \underline{d}^* .
$\tilde{L}_i^1, \tilde{L}_i^2$: (3.2.2), (3.6.3.2), (3.6.3.3) matricer, der beskriver ϵ_i ved hjælp af knudeflytningsvektoren \underline{q} .
$M^{\alpha\beta}$: (2.4.6) symmetrisk momenttensor.
\underline{N}	: (2.2.6) normalvektor til den deformede flade.
\tilde{N}	: (3.2.1) flytningsinterpolationsmatrix.

\tilde{N}_d	:(3.2.5) tilstandsinterpolationsmatrix (for \tilde{d}).
\tilde{N}_{dAu}	:(4.3.9).
\tilde{N}_{dAw}	:(4.4.9).
\tilde{N}_d^*	:(3.2.7) tilstandsinterpolationsmatrix (for \tilde{d}^*).
\tilde{N}_1	:(3.6.1.2), (3.6.3.5) bidrag, der er lineært i \tilde{g} , til tangentstivhedsmatricen.
\tilde{N}_2	:(3.6.1.4), (3.6.3.6) bidrag, der er kvadratisk i \tilde{g} , til tangentstivhedsmatricen.
\underline{n}	:(2.1.3) normalvektor til den udeformede flade.
\underline{p}	:(3.3.1) foreskrevet fordelt belastning.
\underline{q}	:(3.2.1) knudeflytningsvektor for system.
\underline{r}	:(2.2.1) stedvektor til punkter på den deformede flade.
\underline{R}	:(3.3.3), (3.6.3.7) belastningsvektor for system.
$\tilde{R}_{B\alpha\beta}$:(5.3.14).
\tilde{R}_{du}	:(4.3.8).
\tilde{R}_{dw}	:(4.4.8).
\tilde{R}_u	:(4.3.4).
\tilde{R}_w	:(4.4.8), (4.4.12).
\underline{r}	:(2.1.1) stedvektor til punkter på den udeformede flade.
$S(i, j)$:(4.3.2).
$S^{\alpha\beta}$:(2.4.5).
$T(i, j, k)$:(A-4.2.8).
\tilde{T}_u	:(4.3.4).
\tilde{T}_w	:(4.4.12).
u	:(4.3.1) flytning i fladens tangentplan.
\underline{u}	:(2.1.15) flytningsvektor.
\underline{u}	:(3.2.1) flytningsvektor.
\underline{u}_e	:(3.2.3) flytningsvektor i element.
u^α	:(2.1.15) flytningsvektor i fladekoordinatsystemet.
\tilde{W}_e	:(3.2.3) elementknudeflytningsvektor.

\tilde{w}_e^*	:(3.2.6).
\tilde{w}_u	:(4.3.4).
\tilde{w}_w	:(4.4.10).
\tilde{w}_w'	:(4.4.11).
w	:(2.1.15), (4.4.1) flytning i normalens retning.
x_α^i	:(2.1.2) beskrivelse af den udeformerede flade i det kartesiske referencesystem.
$\tilde{\varepsilon}$:(4.5.6) tøjningsmål.
$\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon^{\alpha\beta}$:(2.1.27-30) permutationssymboler hørende til koordinatsystemet på den udeformerede flade.
ε_i	:(3.2.2) tøjningsmål.
ϕ	:(2.4.1) specifik tøjningsenergi.
ϕ_α^γ	:(2.1.19), (2.1.20).
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}$:Christoffelsymboler.
ξ	:(4.2.1) lokal elementkoordinat.
η	:(4.2.1) lokal elementkoordinat.
λ	:(5.2.2) belastningsparameter ved proportional belastning.
λ_α^γ	:(2.2.3).
μ_α	:(2.1.19), (2.1.21).
ν^δ	:(2.2.8).
$\cos \omega$:(2.2.7).
Ω_2	: fladekoordinatparameterområde.
Ω_3	: skalfladen.
π_p	:(2.4.7), (3.3.1) potentiel energi.
θ^α	:(2.1.1) fladekoordinater.

Symboler og notation benyttet i kapitel 6 er samlet i afsnit 6.2.

10. INDEX

basisvektorer 3, 8, 20
 belastningsvektor 24
 Bonnet's sætning 11
 Christoffelsymboler 6, 20
 Codazzi's ligning 11
 Eulerligninger 25, 34, 108
 FEMBAR 75
 fladekoordinater 3
 fladeteoriens fundamentalsætning 11
 flytninger 8, 31
 flytningsfelt 22, 8
 flytningsniveau 102, 107
 flytningstøjningsrelation 25, 82
 forenklede tøjningsmål 15
 fuldstændige tøjningsmål 12
 Gauss' ligning 11
 geometrisk matrix 63
 imperfektionsamplitude 102
 imperfektionsniveau 102, 103, 107
 incrementale ligevægtsligninger 26, 28
 initial stress matrix 63
 knudekræfter 31
 kompatibilitetsligning 88, 91
 kontravariante basisvektorer 4
 kontravariant metrisk tensor 5
 konvergenshastighed 64
 kovariant differentiation 6
 kovariante basisvektorer 3, 4
 kovariant metrisk tensor 4
 kritisk tilstand 61
 krumningstensor 4, 5, 9, 11
 ligevægtsligninger 16, 18, 25, 26, 28, 31, 70, 79, 95
 lokale koordinater 36
 metrisk tensor 4, 5, 7, 9, 11
 normalvektor 3, 8, 9, 20
 perturbationssymboler 7

postbucklingskoefficienter 71
potensmetode 64
potentiel energi 24, 25, 28, 31, 79, 84, 85, 93, 95
specifik tøjningsenergi 15, 22, 24, 84, 85
spændingsfunktion 86
spændingsstørrelser 16, 18
stedvektor 3, 20
stiftlegemebevægelser 35
tilstandsinterpolationsmatrix 39
tilstandsvektor 23, 39, 40, 41, 42
tolerance 102
tøjningsdefinition 22, 23, 32, 42
tøjningsfordelingsmatrix 22, 43
tøjningsmål 22, 42, 84
tøjnings-tilstandsmatrix 44, 58
tøjningsudtryk 12, 29

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1976 -)

- R 69. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. 1976.
- R 70. RIBERHOLT, HILMER and PETER CHR. NIELSEN: Timber under combined compression and bending stress. 1976.
- R 71. KRENCHER, HERBERT og J. BJØRNBACH-HANSEN: Undersøgelse af let konstruktionsbetons væsentligste materialemparametre. 1976.
- R 72. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, FINN BACH and B. CHR. JENSEN: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series T. 1976.
- R 73. NIELSEN, M.P. and M.W. BRÆSTRUP: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. 1976.
- R 74. Resume-oversigt 1975. Summaries of papers 1975. 1976.*)
- R 75. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, B. CHR. JENSEN and FINN BACH: Axisymmetric punching of plain and reinforced concrete. 1976.
- R 76. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Partial prestressing. 1976.
- R 77. LAURSEN, M.E.: EQSHELL. An equilibrium shell finite element for arbitrary shell geometry. 1977.
- R 78. DYRBYE, CLAES and FLEMMING BLIGAARD PEDERSEN: Rubber mountings and vibration isolation. 1977.
- R 79. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN and FINN BACH: Rational analysis and design of stirrups in reinforced concrete beams. 1977.
- R 80. ABK's informationsdag 1977. 1977.
- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MÖLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBACH-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M. ROIKJÆR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978.
- R 90. HESS, UWE, B. CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.

*) Udsolgt. Out of print.

- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLAUS: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværsnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Eingeleimte Gewindestangen. 1978.
- R 100. PEDERSEN, C.: Opbøjet længdearmering som forskydningsarmering. 1978.
- R 101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. 1978.
- R 102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spændbetonbjælker. 1978.
- R 103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.
- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSGAARD, SØREN SKYTTE: Ligevægtselementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.